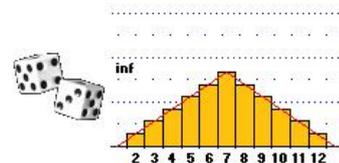
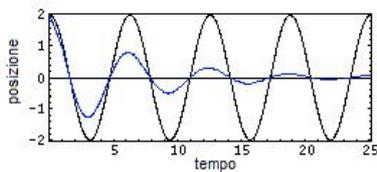
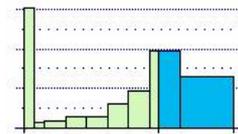
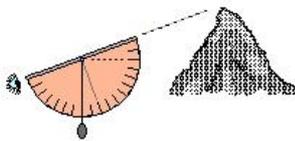
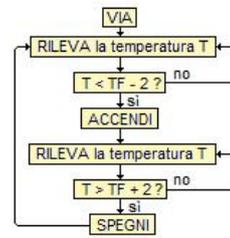
MAtematica per COnoscere e per SApere

volume 1

gruppo didattico
MaCoSa

MACOSA: MAtematica per COnoscere e per SApere

INTRODUZIONE

Questo è un libro di testo che forse troverete un po' diverso dal solito "libro di matematica". Infatti esso:

– è tutto costituito da **schede di lavoro**, che in parte dovrete completare voi;

– affronta, come appare anche dai titoli delle schede, temi sia matematici che **non matematici**;

– non comprende solo "calcoli" da fare, "formule" da capire, … ma anche molte parti **da leggere**;

– è presente in una versione in rete, all'indirizzo **http://macosa.dima.unige.it/sup** (da cui potete recuperare sia le schede di lavoro in formato "html", utili sia per il lavoro individuale che per proiezioni in aula, sia ulteriori esercizi che si aggiungono a quelli presenti nelle schede, oltre a software e ad altro materiale);

– e fa riferimento ad una specie di **dizionario matematico**, *Gli oggetti matematici*, che troverete in rete e in cui potrete rivedere gli argomenti matematici affrontati nelle schede di lavoro.

Il libro è impostato in modo da attuare le indicazioni presenti nei *Nuovi programmi*, che non fanno altro che riprendere e sviluppare quelle presenti nelle precedenti versioni: l'insegnamento della matematica deve essere articolato in **percorsi didattici** che stimolino la partecipazione attiva degli studenti e che introducano e sviluppino i concetti matematici a partire dall'analisi di situazioni "reali" e dalla discussione di problemi "culturali" di più ampio respiro, anche mediante interazioni con le altre discipline.

I programmi contengono argomenti come la Statistica e la Probabilità, presenti da molti anni, sin dalla scuola elementare, ma che spesso sono stati trascurati. Prevedono inoltre una forte riduzione delle attività meccaniche di calcolo, letterale e numerico, a favore di una padronanza consapevole dell'uso dei mezzi di calcolo; anche questo aspetto, fondamentale, è stato sovente non osservato.

In *MaCoSa* si tiene conto di questi aspetti e si dà grande importanza all'uso appropriato dei **linguaggi della matematica** e alla applicazione corretta dei **modelli matematici** (equazioni, funzioni, diagammi, …) alle situazioni reali, aspetti entrambi importanti per usare consapevolmente la matematica di "oggi".

Questo libro non è opera di un singolo **autore**, ma è il risultato del lavoro di insegnanti, della scuola superiore e dell'università, che hanno preparato le schede di lavoro e le hanno sperimentate in varie classi. Anche la vostra esperienza ci sarà utile per rivedere e migliorare il materiale. Grazie della collaborazione.

Nucleo di Ricerca Didattica MaCoSa

Nota. Il volume stampato dalla casa editrice **Aracne** contiene la versione forte delle schede. Nello schema seguente sono indicate le parti che possono essere omesse in alcune schede. In rete sono presenti le schede nelle varie versioni (A, completa, e B, ridotta).

<table>
<tr><td>La Matematica e i Suoi Modelli 1
La Matematica e i Suoi Modelli 2
La Matematica e i Suoi Modelli 3</td><td></td></tr>
<tr><td>Le Statistiche 1</td><td>La Automazione 1
(vers. B senza ques. 16)</td></tr>
<tr><td>Le Statistiche 2
(vers. B senza §4 - Le tecniche e le attrezzature)</td><td>La Automazione 2
(vers. B senza in §4 riquadro sui flip-flop)</td></tr>
<tr><td>Le Statistiche 3
(vers. B senza ques. 20 e 21</td><td></td></tr>
<tr><td>Le Statistiche 4
Algebra elementare
(vers. B con considerazioni abbreviate
dopo ques.4 e ques. 8)</td><td>La Automazione 3
La Automazione 4
(vers. B senza l'uso di Derive in §3
e senza ques. e13)</td></tr>
<tr><td>I Numeri 1
(vers. B senza §4 - Le basi di numerazione
e senza e10-e12)
I Numeri 2
(vers. B senza ques. 19-21, e10-e13)</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Per Strada 1
La Matematica e lo Spazio 1</td><td rowspan="2">Il "primo volume" finisce con Per Strada 2, inteso come limite massimo a cui si può arrivare in prima; le scuole con programma debole possono fermarsi subito prima o dopo Per Strada 1</td></tr>
<tr><td>Per Strada 2
(vers. B senza Note 1 e 2 in §2 e ques. e19)</td></tr>
</table>

Nota per l'insegnante e per chi si occupa di Didattica della Matematica

Indicazioni più dettagliate sono presenti in rete nella **Guida** per gli insegnanti, a cui potete essere indirizzati se ci inviate un messaggio di posta elettronica (**macosa@dima.unige.it**). In rete sono presenti anche, oltre al software e ad altri materiali, riferimenti ad articoli e a pubblicazioni varie che si rifersicono alla impostazione di MaCoSa.

Sono ben accette critiche, suggerimenti, segnalazione di errori, … da parte di tutti i lettori.

La matematica e i suoi modelli

Un esempio tratto dalla vita quotidiana

Scheda **1**

0. Che cos'è una scheda di lavoro?

Lo studio della matematica che affronteremo insieme in classe sarà in gran parte guidato da schede di lavoro come quella che stiamo leggendo in questo momento. Alcuni di voi probabilmente hanno già usato schede di lavoro nella scuola elementare o nella scuola media. Gli altri faranno comunque presto a prendere confidenza con questo strumento.

Una _scheda di lavoro_ è in genere costituita da parti di testo in cui vengono presentati o discussi alcuni argomenti e da parti che l'alunno deve completare per approfondire o trovare risposte ad alcune questioni.

La lettura della scheda e le risposte ai quesiti proposti devono essere affrontate a volte individualmente, altre volte collettivamente insieme ai compagni e all'insegnante.

Il lavoro durante l'anno scolastico verrà articolato in _unità didattiche_. Le unità didattiche nell'insegnamento sono più o meno come i capitoli in un libro: in esse vengono raggruppati argomenti che sono simili o affini o che sono collegati dal filo del discorso che viene seguito.

Ogni unità didattica avrà un titolo che ne esprimerà in forma assai sintetica il contenuto e che verrà ripreso nelle schede di lavoro che useremo durante il suo svolgimento. Ad esempio questa è la prima scheda (*scheda 1*) di *La matematica e i suoi modelli*, unità didattica introduttiva, che cerca di dare un'idea di come studieremo la matematica durante l'anno.

Naturalmente non tutto il lavoro sarà guidato o svolto su schede di lavoro. A volte le lezioni saranno condotte direttamente dall'insegnante, a voce e con l'ausilio della sola lavagna. A volte saranno i singoli alunni che dovranno cercare di spiegare in maniera comprensibile ai compagni alcuni argomenti o la soluzione di alcuni problemi. A volte si lavorerà nel laboratorio computazionale (cioè in un'aula attrezzata con personal computer) che d'ora in poi chiameremo più semplicemente *aula computer*. **…**

1. Una cartina della rete ferroviaria

Consideriamo un genere di situazioni in cui prima o poi quasi tutti, con maggiore o minore frequenza, si imbattono: *dover scegliere l'itinerario e l'ora in cui affrontare un viaggio in treno*

I coniugi Van Per Tren, una coppia di olandesi che nell'estate di un certo anno stanno trascorrendo le vacanze in Italia, vogliono trasferirsi col treno da Bologna a Vicenza, partendo al mattino fra le 8 e 30 e le 11. Consultano l'orario ferroviario in vigore che hanno acquistato presso un'edicola per decidere quale percorso seguire. Per individuare le linee impiegabili esaminano l'*indice grafico* stampato nella prima pagina dell'orario: una cartina in cui sono riprodotte le linee ferroviarie e sono indicati i relativi quadri dell'orario.

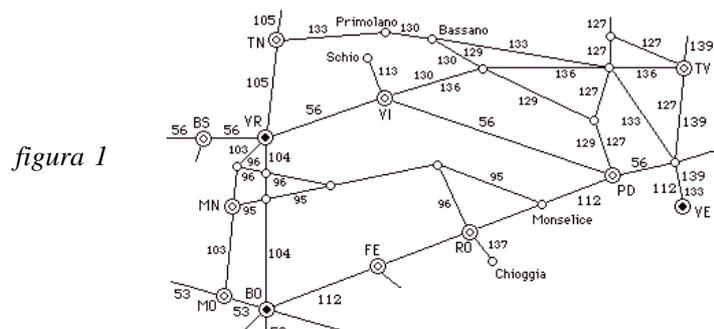



figura 1

Nella *figura 1* è riprodotta la porzione dell'indice grafico contenente le linee che possono interessare ai signori Van Per Tren. Per rendere più leggibile la figura abbiamo indicato solo le sigle delle città capoluogo di provincia e i nomi completi delle altre località che sono capilinea. Ad esempio la linea descritta nel quadro 130 collega Vicenza e Primolano.

1 Se foste al posto dei Van Per Tren, quali quadri consultereste per decidere quali treni prendere?

....

104		2184	84	11448
km		B	A	C
0	**Bologna**	844	1054	1100
12	Tavernelle	–	–	1110
21	S.Giovanni	904	–	1119
25	Amola	–	–	1124
30	Crevalcore	915	–	1129
35	Bolognina	–	–	1134
38	Camposanto	–	–	–
43	S.Felice	929	–	1142
50	Mirandola	936	–	1148
60	Poggio Rusco	948	–	1157
66	Revere Scalo	–	–	1202
68	Revere	–	–	1205
70	Ostiglia	956	–	1209
79	Roncanova	–	–	1216
84	Nogara	1006	–	1222
90	Pellegrina	–	–	1228
95	Isola d. Scala	1018	–	1240
103	Buttapietra	–	–	1301
114	**Verona** P.N.	1038	1226	1317

← *codice del treno*
← *tipo di treno*
← *ora; 844 sta per 8:44*

Caldiero è al 164° chilometro della linea Milano-Vicenza →

56		2073	10939	2075
km		B	C	B
0	**Milano** C.	910		1150
…	…			
148	**Verona** P.N.	1046	1320	1343
151	Verona P.V.	–	1324	–
157	S.Martino	–	1331	–
164	Caldiero	–	1337	–
172	S.Bonifacio	–	1351	–
178	Lonigo	–	1357	–
183	Montebello	–	1403	–
192	Altavilla	–	1412	–
200	**Vicenza**	1120	1422	1406

112		2218	30
km		B	A
0	**Bologna**	840	1040
…	…		
47	**Ferrara**	912	–
…	…		
80	**Rovigo**	931	–
…	…		
123	**Padova**	1006	1146

56		2062	2078	656	1176
		B	B	A	A
0	**Venezia**		1035	1145	1150
…	…				
37	**Padova**	1102	1116	1221	1228
47	Mestrino	–	–	–	–
52	Grisignano	1112	–	–	–
60	Lerino	1119	–	1134	–
68	**Vicenza**	1127	1136	1240	1249

2 Esaminate i quadri (che abbiamo riprodotto parzialmente, indicando con A, B e C le categorie di treni allora in vigore) e stabilite quale dei due itinerari è più corto.

chilometri percorsi con l'itinerario BO - VR - VI: ....

chilometri percorsi con l'itinerario BO - PD - VI: ....

3 Questo itinerario è anche il più breve, cioè quello che comporta un tempo di percorrenza inferiore? Perché?

....

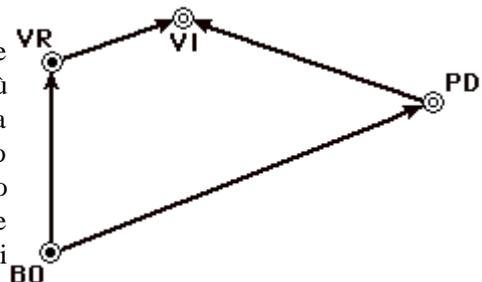
....

4 Se foste al posto dei Van Per Tren quali treni prendereste?

....

....

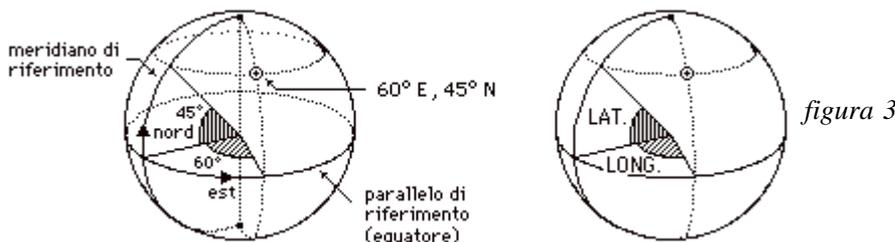
2. Che cosa viene rappresentato fedelmente?

Il signor Van Per Tren non capisce come sia possibile che l'itinerario che sulla cartina appare molto più corto sia in realtà più lungo (→ quesito 2). Si rende conto che nella cartina la descrizione delle linee ferroviarie è stata semplificata impiegando tratti rettilinei per cui un itinerario potrebbe essere molto più lungo di come appare. D'altra parte, poiché si tratta di linee che attraversano la pianura, gli sembra improbabile la presenza di numerose curve.

Prende allora la sua guida turistica dell'Europa e si posiziona sulla pagina che contiene la rappresentazione cartografica dell'Italia. La cartina (riprodotta parzialmente nella *figura 2*: abbiamo omesso le isole e abbiamo segnalato solo i capoluoghi di regione) presenta una reticolatura che consente di individuare la posizione di una località note le sue coordinate geografiche (longitudine e latitudine). La guida contiene infatti un elenco in ordine alfabetico di numerose località con l'indicazione delle loro coordinate.

Ad esempio Firenze ha coordinate 11° 16' E (longitudine), 43° 45' N (latitudine).

figura 2

Nella *figura 3* è richiamato mediante un'illustrazione il significato delle *coordinate geografiche*.

figura 3

Confrontando le due cartine i Van Per Tren si rendono conto immediatamente che nella prima cartina (➡ fig. 1) le località non sono disposte come nella seconda (➡ fig. 2). Per curiosità, aiutandosi con una piccola riga graduata e con la calcolatrice tascabile, calcolano il rapporto tra le distanze in linea d'aria di Bologna da Venezia e da Trento così come risultano dalla seconda cartina; poi calcolano il rapporto tra le stesse distanze così come appaiono sulla prima cartina e confrontano i due rapporti ottenuti.

5 Facciamo anche noi lo stesso confronto. Che cosa possiamo concludere?

....

....

L'indice grafico, cioè la cartina riprodotta nella figura 1, non rappresenta le linee ferroviarie con totale fedeltà.

Abbiamo potuto osservare subito, confrontando i quadri orari, che non sono segnalate tutte le stazioni ferroviarie, ma solo quelle delle località principali o che sono capilinea o nodi in cui si incontrano più tratti di linea ferroviaria.

Abbiamo poi visto che le lunghezze dei tratti che congiungono le stazioni sono sproporzionate.

Ma, allora, *quali aspetti vengono riprodotti fedelmente?*

(*) Viene riprodotto fedelmente l'*ordine in cui le stazioni rappresentate si susseguono* lungo le varie linee ferroviarie.

(**) Viene inoltre conservato l'*ordine con cui i diversi tratti di linea si innestano in un nodo* ferroviario.

6 Nella figura 4 sono riprodotte porzioni di tre possibili indici grafici (sono stati omessi i riferimenti numerici ai quadri). Quali conservano entrambi gli aspetti sopra indicati? Quali non li conservano, e perché?

....

....

....

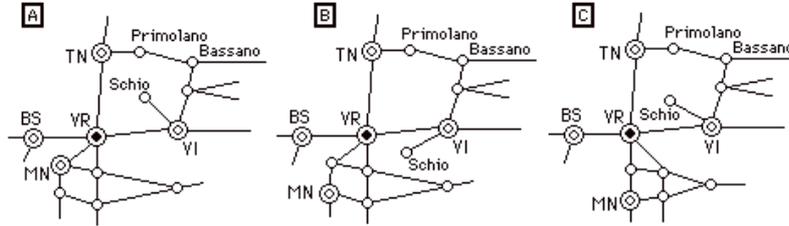



figura 4

3. Diverse rappresentazioni cartografiche

Abbiamo usato la cartina della ➔ figura 2 per concludere che l'indice grafico (➔ figura 1) non rappresenta fedelmente le distanze tra le località.

Ma la cartina della figura 2 rappresenta fedelmente le distanze?

Una nave che da Genova proceda verso sud scendendo di un grado di latitudine percorre 111 km circa (100 metri più, 100 metri meno). Percorre la stessa distanza se parte da Bari e sale di un grado di latitudine.

In generale la distanza sulla superficie terrestre tra un parallelo e quello che ha un grado in più di latitudine è di circa 111 km, e questo vale sia presso l'equatore che presso i poli. Quindi nel globo rappresentato nella *figura 5* la distanza che intercorre tra due qualunque paralleli successivi (in questo globo i paralleli tracciati differiscono l'uno dall'altro per 15° di latitudine) corrisponde in ogni caso a circa $111 \cdot 15 = 1665$ km.

Invece la distanza tra un meridiano e quello che ha un grado in più di longitudine può differire notevolmente da una zona all'altra.

7 Quanti chilometri corrispondono a uno spostamento di un grado di longitudine lungo l'equatore? Avvicinandosi ai poli la distanza tra due qualunque meridiani a quale valore tende?

....

....

....

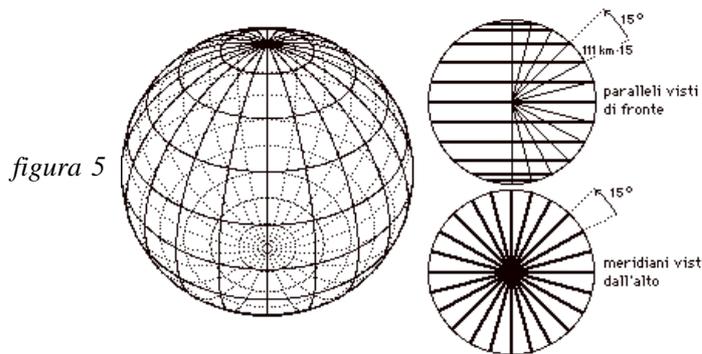
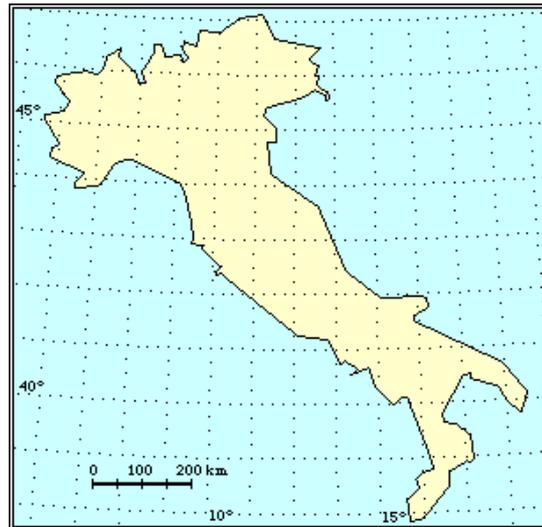



figura 5

Nella cartina di ➔ figura 2 la distanza tra due meridiani rimane immutata spostandosi da sud a nord, mentre in realtà due meridiani che differiscono per un grado di longitudine a Reggio Calabria distano circa 87 km e a Trento circa 77 km. Quindi neanche questa cartina rappresenta fedelmente le distanze: dilata orizzontalmente le zone meridionali e contrae orizzontalmente le zone settentrionali, anche se di poco.

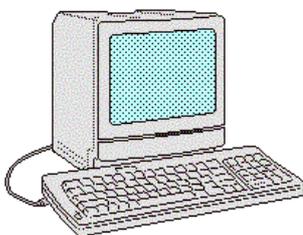
La cartina di *figura 6* rappresenta con maggiore fedeltà le distanze.

figura 6

Tuttavia neanche questa cartina è del tutto fedele (➔ esercizio 8). *Nessuna cartina può essere una perfetta riproduzione in scala* di una porzione della superficie terrestre. E la riproduzione è inevitabilmente tanto meno precisa quanto più grande è la superficie da rappresentare.

8 Perché?

Come avrai notato, le cartine delle figure 2 e 6 non hanno i contorni lisci. Sono state, infatti, tracciate mediante un piccolo *personal computer*. Le immagini prodotte sullo schermo del calcolatore, che appaiono costituite da tanti piccoli rettangolini (*figura 7*), sono state poi riportate su carta mediante una stampante.

figura 7

Ingrandimento di come può apparire sullo schermo di un calcolatore la parola ROMA sottolineata con un tratto punteggiato. I punti vengono rappresentati con rettangolini luminosi e i segmenti e le curve che compongono le lettere vengono approssimate con insiemi di rettangolini.

La realizzazione delle immagini è stata eseguita fornendo al calcolatore le coordinate geografiche di moltissimi punti del contorno dell'Italia peninsulare e facendogli calcolare le posizioni dei rettangolini dello schermo con cui rappresentare i vari punti.

Il modo in cui effettuare questo calcolo è stato comunicato al calcolatore mediante un *programma*, cioè una sequenza di istruzioni (battute attraverso la tastiera) con cui si sono descritte le varie formule e i vari procedimenti da impiegare per ottenere, date le coordinate geografiche di un punto, le *coordinate schermo* del rettangolino con cui rappresentarlo.

Cambiando il programma si possono ottenere diverse rappresentazioni piane (cioè diversi tipi di cartine) dell'Italia o (se si forniscono i dati opportuni) di altre porzioni della superficie terrestre.

Un tempo questi calcoli venivano fatti a mano. L'uso del calcolatore ha solamente facilitato e sveltito il lavoro.

Naturalmente, fornendo le coordinate geografiche di più punti e impiegando dei calcolatori e delle stampanti più sofisticate si possono ottenere rappresentazioni cartografiche con i contorni più precisi. Ma, come abbiamo visto, per quanto si possa migliorare la precisione con cui tracciare i contorni, le rappresentazioni che si ottengono, essendo piane, non possono riprodurre fedelmente parti della superficie terrestre.

4. I modelli matematici

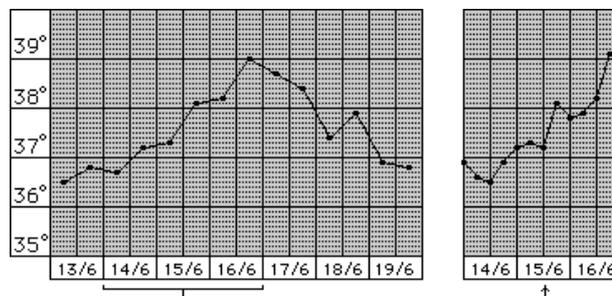
Nessuna delle ***cartine*** considerate riproduce esattamente ciò che rappresenta. Per altro alcune sono più fedeli di altre, ma ciò non vuol dire che siano migliori:

– Se l'indice grafico fosse stato tracciato su una cartina come quella di fig. 6 avremmo sì ottenuto una rappresentazione più fedele della posizione delle varie località, ma di più difficile lettura. Invece l'editore dell'orario ha modificato opportunamente la collocazione spaziale delle diverse stazioni in modo da facilitare la lettura dei nomi delle località e dei numeri dei quadri relativi alle varie linee. All'utente che consulta l'orario non interessa infatti che siano conservati i rapporti tra le distanze o gli angoli formati dalle linee che si incontrano in un nodo, ma interessa solamente l'ordine con cui si susseguono le varie stazioni e un'indicazione approssimativa delle direzioni delle diverse linee.

– La cartina di figura 2, che rappresenta meno fedelmente distanze e angoli rispetto alla cartina di figura 6, in cambio, avendo un sistema di riferimento ortogonale (paralleli e meridiani rappresentati con rette tra loro perpendicolari) offre una lettura più facile delle coordinate.

Possiamo dire che le diverse rappresentazioni cartografiche di una certa regione della superficie terrestre sono differenti ***modelli*** di essa. Facciamo qualche altro esempio di modello. Il ***diagramma*** in *figura 8* è un modello che rappresenta la temperatura corporea di una persona degente in ospedale.

figura 8

Diagramma della temperatura corporea registrata in una persona degente in ospedale al mattino e al pomeriggio per alcuni giorni consecutivi e porzione del diagramma che si otterrebbe con più rilevamenti sistematici.

L'andamento della linea ottenuta congiungendo i punti corrispondenti ai successivi rilevamenti dà immediatamente un'idea complessiva di come è variata la temperatura, ma non è una rappresentazione fedele dell'andamento della temperatura dal 13 giugno al 19 giugno. Ad esempio la parte di grafico che va dal punto corrispondente alla mattina del 14 a quello corrispondente al pomeriggio del 16 è costantemente in salita, mentre nella realtà la temperatura potrebbe aver avuto delle oscillazioni. A fianco del diagramma ospedaliero è raffigurata parte di un diverso diagramma che si potrebbe ottenere se la temperatura fosse rilevata ogni giorno sistematicamente alle 6, alle 12, alle 18 e alle 24.

Il fenomeno "temperatura corporea" non è rappresentato esattamente anche per altri aspetti.

Innanzi tutto i pallini sono tracciati al centro delle due colonne che rappresentano la prima metà e la seconda metà di un giorno anche se le temperature non vengono rilevate alle 6 del mattino e alle 6 del pomeriggio.

Poi la temperatura registrata col termometro non è il valore preciso della temperatura. Infatti leggendo il termometro si cerca di individuare la tacca della scala numerica che è più vicina all'estremità della colonnina di mercurio; il numero ottenuto ci dà una misura della temperatura fino ai decimi di grado, non oltre. Ad esempio se la colonnina arriva fra la tacca 37.2 e la tacca 37.3 e ci sembra che sia più vicina alla prima tacca, diciamo che la temperatura è 37.2°, ma in realtà potrebbe avere un valore superiore a 37.2° ed essere ad esempio 37.236…°. Per ottenere i centesimi di grado sarebbe necessaria un'ulteriore suddivisione della scala graduata, per ottenere i millesimi di grado ne occorrerebbe ancora un'altra, e così via.

Inoltre sul retro del termometro troviamo una scritta come quella riportata nella *figura 9*. Essa significa che impiegando un altro termometro dello stesso modello si sarebbe potuta ottenere la temperatura 37.1° o la temperatura 37.3°, cioè una variazione in più o in meno di 0.1° rispetto alla temperatura 37.2° che abbiamo letto.

figura 9

35 36 37 38

Precisione:
1 decimo di grado (±0.1°)

37.2° ± 0.1°

Con questa scritta il fabbricante del termometro ci assicura che materiali e tecniche di fabbricazione impiegate (il procedimento con cui sono state incise le tacche sulla scala, il modo in cui sono state posizionate la colonnina di mercurio e la scala graduata, …) garantiscono che la misura vera può differire dalla misura letta al più di 0.1°. A volte si usa la scrittura *37.2 ± 0.1 gradi* per indicare una temperatura di cui si conosce la misura 37.2° letta con uno strumento che ha la precisione di 1 decimo di grado.

Da quanto ora osservato segue che anche i ***numeri***, quando sono impiegati per descrivere una grandezza, assai spesso non la descrivono esattamente, ma in maniera *approssimata*. In altre parole il numero che esprime la misura di una grandezza è un *modello* di questa. A seconda dello strumento di misura impiegato o delle informazioni che si hanno a disposizione si possono ottenere misure più o meno precise, cioè modelli che rappresentano più o meno fedelmente la grandezza. Anche in questo caso non esiste "il modello migliore".

Ad esempio, per valutare lo stato di salute di una persona come informazione sulla sua temperatura corporea un dato come 38.4° è sufficiente, e è più "leggibile" di un dato come 38.391°, che sarebbe rilevabile con un termometro più sofisticato.

9 In uno stesso giorno su due quotidiani di una stessa nazione europea compaiono due articoli dedicati all'inizio dell'anno scolastico. In entrambi si vuole dare un'idea di quanto costi il mantenimento agli studi disponendo dell'informazione che nell'anno precedente una famiglia spendeva mediamente 1 264.70 € in "istruzione". Nel primo giornale questa spesa viene indicata con «mille e 264 euro», nel secondo con «mille e trecento euro». Nessuno sceglie «1 264.70 euro». Che differenze ci sono tra questi tre modi di indicare la spesa considerata? Quale dei tre avresti scelto tu? Perché?

....

....

....

....

Considerando le rappresentazioni cartografiche abbiamo incontrato un ulteriore tipo di modello di natura numerica. Abbiamo infatti ricordato che per rappresentare una posizione in una cartina o un punto in una generica superficie piana, fissato un sistema di riferimento, si utilizza una opportuna coppia di numeri, le coordinate del punto. Questa *coppia di coordinate* è il modello con cui rappresentiamo il *punto*.

A seconda della approssimazione con cui vogliamo rappresentare una posizione possiamo avere coordinate più o meno precise. Ad esempio possiamo dire che Firenze ha coordinate 11° E, 44° N o che ha coordinate 11° 16' E, 43° 45' N.

Sempre nell'ambito delle rappresentazioni della superficie terrestre, abbiamo impiegato un altro modello: abbiamo identificato la *Terra* con una *sfera*; in particolare abbiamo supposto che meridiani ed equatore fossero tutti circonferenze eguali. Questo modello è realizzato materialmente nei globi terrestri girevoli.

Anche questa modellizzazione, assai efficace, nasce da una semplificazione: vengono trascurati i rilievi, come se la superficie terrestre fosse tutta al livello del mare, e, soprattutto, non si tiene conto che la Terra è leggermente schiacciata ai Poli: il suo spessore all'altezza dell'equatore è di circa 12 760 km mentre tra i due Poli è di circa 12 715 km. In particolare mentre un grado di longitudine corrisponde a 111.1 km, un grado di latitudine lungo l'equatore corrisponde a 111.3 km.

I modelli che abbiamo considerato fin qui (raffigurazione sul piano di superfici non piane, diagrammi, numeri per rappresentare grandezze, coppie di numeri per rappresentare posizioni, sfera approssimante la Terra) sono tutti ***modelli matematici***, nel senso che sono rappresentazioni semplificate di fenomeni o aspetti della ***realtà*** realizzate impiegando oggetti matematici (figure, numeri, …).

Naturalmente non esistono solo modelli matematici.

Ad esempio un *trenino elettrico* che sia il modello in scala ridotta di una locomotiva reale non è un modello matematico in quanto è realizzato impiegando tecniche e concetti non riconducibili solo alla matematica (ad esempio il funzionamento del motorino si basa su principi di fisica, la scelta e la lavorazione dei materiali fa riferimento a nozioni di chimica e di altre discipline, …).

Oppure si pensi alla ricostruzione dei fattori che sono stati all'origine di un certo evento dell'antichità e alla *descrizione* di questo *evento* che vengono fatte da un *manuale di storia*: non siamo di fronte a una rappresentazione fedele di ciò che accaduto, ma a una rappresentazione semplificata, che cerca di cogliere gli aspetti e le cause (che l'autore ritiene) essenziali. Cioè siamo di fronte a un modello di quell'evento, che evidentemente non è matematico, e è anche molto "soggettivo": un altro storico può interpretare e collegare diversamente le varie informazioni sull'evento che si hanno a disposizione.

Le *discipline* (la matematica, la chimica, la linguistica, la geografia, …) fanno un ampio uso di modelli, cioè di rappresentazioni semplificate o convenzionali, che sono utili per facilitare i ragionamenti, la comunicazione delle idee, …; lo stesso facciamo anche noi, nella vita quotidiana. Vi sono tuttavia alcune differenze fondamentali tra i modelli della matematica e i modelli impiegati in altre discipline e in altri campi. Su questi aspetti ci soffermeremo maggiormente nell'ultima scheda dell'unità didattica.

5. Esercizi

e1 Nella *figura 10* sono rappresentate su una striscia di carta quadrettata, in una scala opportuna, le posizioni lungo la linea Bologna-Venezia delle stazioni di Bologna e di Padova.

La linea ferroviaria è rappresentata *rettificata*, cioè "raddrizzata" fino ad assumere forma rettilinea: vengono rappresentate le *distanze ferroviarie* che intercorrono tra Bologna e le altre stazioni, non le direzioni che man mano assume la strada ferrata.

(a) Quanti chilometri rappresenta un quadretto grande? ... Quanti uno piccolo? ...

(b) Completa la figura indicando con due frecce le posizioni di Ferrara e di Rovigo.

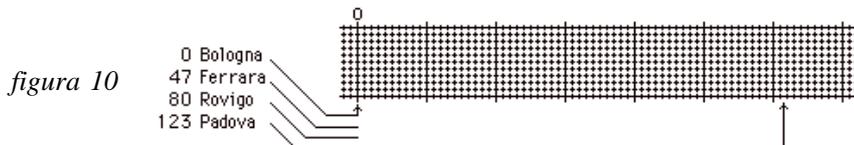



figura 10

e2 Nella *figura 11* sono rappresentate le stesse stazioni della linea Bologna-Venezia viste in fig. 10.

(a) Con un righello o con una striscia di carta millimetrata misura la distanza nella figura tra Bologna e Padova e, tenendo conto della distanza ferroviaria reale, calcola la scala di riduzione della nostra rappresentazione.

scala 1 : .....

Ricorda che, ad esempio, *scala 1:15000*, scritto anche 1/15000 o "a due piani" nel modo riprodotto a destra, si legge *scala 1 a 15000* o *1 quindicimillesimo* o *1 diviso 15000* e indica che le distanze reali sono state divise per 15000, cioè moltiplicate per 1/15000, ossia che per ottenere le distanze reali occorre moltiplicare per 15000 le distanze sulla cartina. $\frac{1}{15000}$

(b) Descrivi, in poche parole, come hai proceduto per calcolare la scala di riduzione.

....

....

....

....

BO FE RO PD

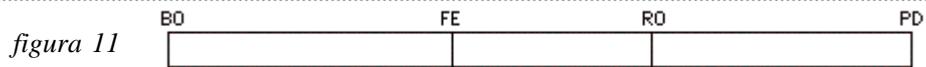
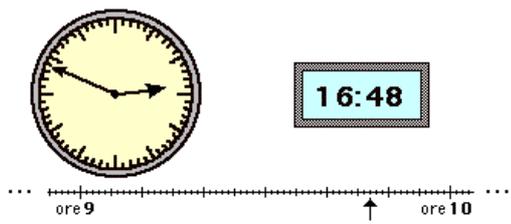



figura 11

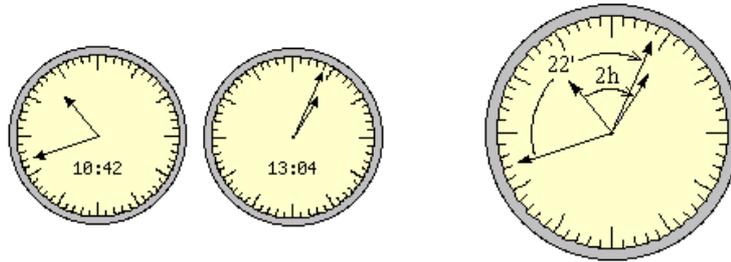
e3 Considera la cartina in ➜ figura 2. Individua i capoluoghi di regione aventi approssimativamente le seguenti coordinate geografiche: 14° E, 41° N; 8° E, 45° N; 11 ° E, 46° N; 16° E°, 38° N. Determina (approssimativamente) le coordinate dei seguenti capoluoghi di regione: Bari, Aosta, Trieste.

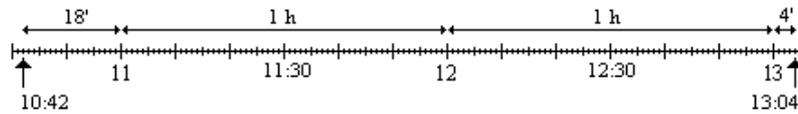
e4 A fianco sono rappresentate tre ore mediante tre diversi dispositivi. Rappresenta ciascuna ora anche mediante dispositivi degli altri due tipi.

e5 Considera il seguente problema:

«Per registrare un programma televisivo il cui inizio e la cui fine sono previsti rispettivamente per le 21:40 e per le 23:25 basta un disco in cui sono disponibili ancora 120 minuti o ne occorre uno nuovo?»

Giovanni sostiene che per risolvere il problema si deve calcolare 23:25 – 21:40. Laura afferma che conviene calcolare 21:40 + 2:00.

- Chi dei due ha ragione secondo te? Qual è la soluzione del problema? Perché?

e6 Le due figure seguenti, a sinistra, riproducono lo stato di un orologio in due momenti successivi (10:42 e 13:04) di uno stesso giorno. La figura successiva visualizza come si può calcolare il tempo trascorso riferendosi alle posizioni delle lancette:
la lancetta corta è ruotata di "2 ore" e "rotti", la valutazione di quanto è ruotata la lancetta lunga ci permette di valutare i "rotti" (è ruotata di "22 minuti").

La stessa differenza di tempi può essere calcolata riferendosi alla *retta dei tempi* nel modo sotto illustrato:

– dalla prima alla seconda freccia intercorrono:
  - 2 divisioni che rappresentano 1 h
  - 18+4 divisioni che rappresentano un minuto
– per un totale di 2 h e 22 min.

Con rappresentazioni simili a queste, con cui abbiamo determinato il valore della differenza tra 10:42 e 13:04, illustra le seguenti operazioni:
- 19:12 – 18:51, 7:31 – 5:42 (pensale come differenze di tempi e procedi come nel caso precedente)
- 11:08 + 3:55, 20:49 + 2:27, 23:30 + 2:02 (pensale come determinazione dell'ora finale; ad es. per la prima addizione: dalle 11:08 l'orologio avanza di 3 h e 55'; qual è la posizione finale delle lancette, ovvero della freccia che segna l'ora sulla retta dei tempi?)
- 13:27 – 1:05, 10:14 – 3:15 (pensale come determinazione dell'ora iniziale; ad es. la prima operazione può essere vista come soluzione del problema: l'orologio segna le 13:27 dopo che è trascorsa 1 h e 5'; qual era l'ora iniziale? cioè, se retrocedo di 1 h e 5', quale posizione assumono le lancette, ovvero fino a dove retrocede la freccia che segna l'ora sulla retta dei tempi?)

[non importa che i disegni siano belli, non serve che siano tracciate tutte le divisioni: bastano schizzi comprensibili]

e7 Adesso sono le 14:45. Devi ancora vedere/ascoltare sul videoregistratore un disco per lo studio della lingua inglese che dura 75 minuti. Poi vuoi andare al campo sportivo ad allenarti per 2 ore; per gli spostamenti (andata e ritorno dal campo) ci vogliono 40 minuti. Devi assolutamente essere a casa alle 19:30. Calcoli a mente quanto tempo ti rimane per stare fuori con gli amici.
- Quanto ottieni? • Descrivi a parole il procedimento che hai impiegato per trovare la risposta.

e8 Nella fig. 12 è riprodotta in parte una cartina realizzata con la tecnica usata per quella di ➡ fig. 6 ma riferita a una zona più ampia, per cui sono più evidenti le deformazioni rispetto alla superficie terrestre.
- Indica due tratti che hanno lunghezza diversa sulla cartina ma uguale sulla superficie terrestre.
- Indica una linea che sulla cartina è curva ma corrisponde a una traiettoria rettilinea sulla superficie terrestre.

figura 12

La matematica e i suoi modelli

Un esempio tratto dalla vita quotidiana

Scheda **2**

1. Quanto costa un viaggio in treno?

Come avrete capito, le vacanze dei signori Van Per Tren sono un pretesto per proporvi alcuni esercizi con cui riprendere confidenza con le nozioni di matematica che avete studiato nella scuola media inferiore e introdurre il lavoro che svolgeremo quest'anno. Nella realtà chi intraprende un viaggio si pone qualche problema in meno dei nostri amici. Comunque andiamo avanti nella nostra finzione.

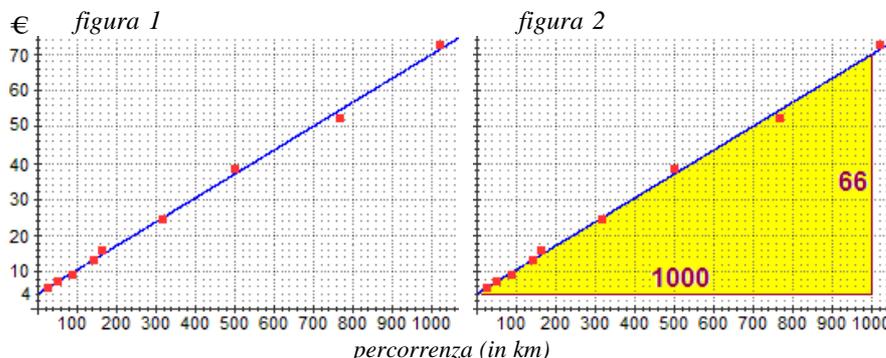
I Van Per Tren, che cercano di amministrare nel miglior modo possibile i soldi che hanno deciso di spendere per le vacanze, oltre al problema del tempo impiegato dai vari treni, si pongono anche quello del costo del viaggio. Cercano nell'orario ufficiale i prezzi, ma non li trovano e non trovano neanche un modo per calcolarli sulla base della distanza chilometrica. Allora cercano su Internet, nel sito delle Ferrovie dello Stato, le tariffe di alcune corse, per i tipi di categoria intermedia (che nella scheda 1 abbiamo chiamato B), e cercano di capire come si formano i prezzi. Ecco i dati che recuperano, per alcune corse (i prezzi sono in euro, relativi all'anno in cui i Van Per Tren stanno facendo le vacanze, e sono relativi ai viaggi in 2ª classe):

(**1.1**)

km	tariffa	km	tariffa	km	tariffa	km	tariffa	km	tariffa
28	6	**46**	7	**90**	9	**144**	13.50	**165**	16
313	24.70	**501**	38.50	**769**	52.50	**1023**	72.50		

Per organizzarsi i prossimi viaggi nel modo più conveniente, i nostri meticolosi amici cercano di capire meglio come variano le tariffe. La signora Van Per Tren, che per mestiere fa l'insegnante di matematica, esaminando la tabella riesce a capire l'andamento delle tariffe. Noi cercheremo di aiutarci con un grafico su carta quadrettata del prezzo del biglietto al variare della percorrenza (*figura 1*).

figura 1 *figura 2*

percorrenza (in km)

Come si vede i punti che rappresentano la tabella si dispongono all'incirca lungo una retta che parte dal punto di *ascissa* 0 e di *ordinata* 4 e arriva nel punto di ascissa 1000 e ordinata 70, come si vede meglio in *figura 2*.

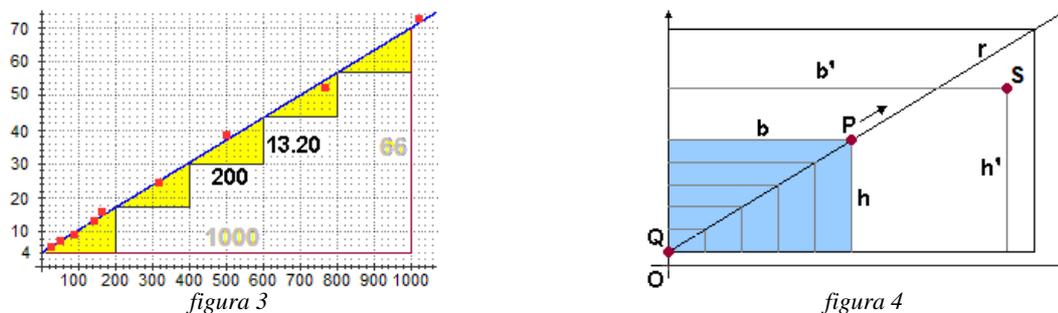



figura 3

figura 4

Le *figure 3* e *4* richiamano il significato della ***proporzionalità***. Supponiamo che le tariffe crescano esattamente come rappresentato dal grafico rettilineo rappresentato in figura 3: ogni 200 km in più la tariffa aumenta di 13.20 € (infatti 200 è 1000/5 e 66/5 = 13.20). Generalizzando consideriamo la figura 4: muovendo lungo la retta *r* il vertice *P* del rettangolo tratteggiato, questo viene ingrandito (se *P* viene allontanato da *Q*) o rimpicciolito (se *P* viene avvicinato a *Q*) mantenendo la stessa forma: le dimensioni, base e altezza, *variano in proporzione*, cioè vengono moltiplicate per uno stesso numero.

In altre parole il *rapporto* base/altezza è *costante*: se la base è *tot* volte l'altezza, in tutte le riproduzioni proporzionate la base continua a essere *tot* volte l'altezza. Invece il rettangolo ottenuto spostando il vertice *P* nel punto *S* non appartenente a *r* è un ingrandimento *sproporzionato* del rettangolo tratteggiato: la base è stata ingrandita maggiormente dell'altezza.

Dunque, ogni chilometro la tariffa aumenta di circa 66/1000 = 0.066 €. Questo (0.066 €/km) è il rapporto approssimativo tra l'aumento del prezzo e l'aumento della percorrenza.

In conclusione possiamo dire che, grosso modo, le tariffe crescono "regolarmente" all'aumentare della lunghezza del percorso e che il prezzo, euro più, euro meno, è dato dalla *formula*:

(**1.2**) PREZZO (in €) = 4 + (n° di CHILOMETRI PERCORSI) · 0.066

Il punto a mezza altezza "·" è un simbolo per indicare la moltiplicazione. Lo useremo spesso in alternativa al simbolo "×". Una formula che, come questa, abbia la forma "…=…", cioè sia costituita da due *termini* separati dal simbolo di *eguaglianza*, viene detta anche *equazione*.

La formula (1.2) rappresenta le tariffe ferroviarie in forma assai concisa. Tuttavia non le rappresenta esattamente, ma in modo approssimato. Consultare Internet o altre fonti di informazione delle Ferrovie è indispensabile se si vuole conoscere esattamente il costo di un viaggio; il ***modello*** "formula" ha invece il vantaggio di essere facilmente memorizzabile e di essere così impiegabile quando non si hanno a disposizione altre fonti di informazione.

1 Calcolate i prezzi per 144 e 501 km impiegando (1.2) e confrontateli con quelli ricavati da Internet.

144 km [ ] 501 km [ ]

Abbiamo introdotto la ***formule*** (1.2) e il ***grafico*** di fig. 1 come rappresentazioni semplificate della ***tabella*** (1.1). In realtà l'aspetto più importante è che esse ci consentono di *comprendere il ragionamento seguito da chi ha predisposto la tabella delle tariffe*: chi amministra le Ferrovie ha voluto fissare il prezzo in modo che fosse formato da una quota fissa e da una parte più o meno proporzionale alla lunghezza del tragitto percorso.

2. Quale tipo di biglietto conviene?

Consultando Internet trovano che, nel periodo in cui vogliono venire in Italia, sono in vigore alcune tariffe agevolate. In particolare soffermano l'attenzione su un particolare *biglietto chilometrico*: costa 42 € e può essere impiegato per fare più viaggi, fino a una percorrenza complessiva di 500 km. Usando la formula che stima i prezzi dei biglietti, come possono affrontare quesiti come i seguenti?

2 (A) Se devo fare un viaggio di 500 km mi conviene fare un biglietto normale o un biglietto chilometrico?
(B) E se devo fare un viaggio di 200, due di 100 ed uno di 90 km?

....

3. La Freccia delle Dolomiti

I nostri amici olandesi osservano che da Padova si possono raggiungere in treno le Dolomiti, arrivando fino a Calalzo di Cadore, posto all'inizio della Valle d'Ampezzo, vicino al Lago di Cadore. Pensano quindi di raggiungere Vicenza facendo scalo non a Verona ma a Padova, così da poter fare una puntata di un giorno nelle Dolomiti.

(**3.1**)

km		↓
0	**Padova**	1530
11	Campodarsego	1540
15	S.Giorgio	1546
19	**Camposampiero**	1550
31	**Castelfranco**	1602
		1622
48	**Montebelluna**	1636
56	Cornuda	1646
66	Fener	1657
83	Feltre	1715
101	Bribano	1733
114	**Belluno**	1747
121	Polpet	1755
132	Longarone	1808
158	**Calalzo**	1855

Su una guida trovano indicato un treno che viene indicato come *Freccia delle Dolomiti*. Stimolati dal nome, che suggerisce alte velocità, pensano di impiegarlo per raggiungere Calalzo.

Nella tabella (3.1) sono state riportate dall'orario le ore in cui il treno sosta nelle varie stazioni. Per le stazioni in cui la sosta è più lunga è indicata sia l'ora di arrivo che quella di partenza.

Stimiamo la *velocità media* con cui è percorso il tratto Padova-Calalzo.

– 15:30 $\xrightarrow{+3}$ 18:30 $\xrightarrow{+0:25}$ 18:55: il tempo impiegato è 3 *h* e 25 *min*;

– la distanza è 158 *km*;

– il tempo è 3 *h* e rotti, la distanza è 150 *km* e rotti, 150=50·3, quindi il treno in 1 *h* fa mediamente circa 50 *km*.

Controlliamo questa stima con la calcolatrice.

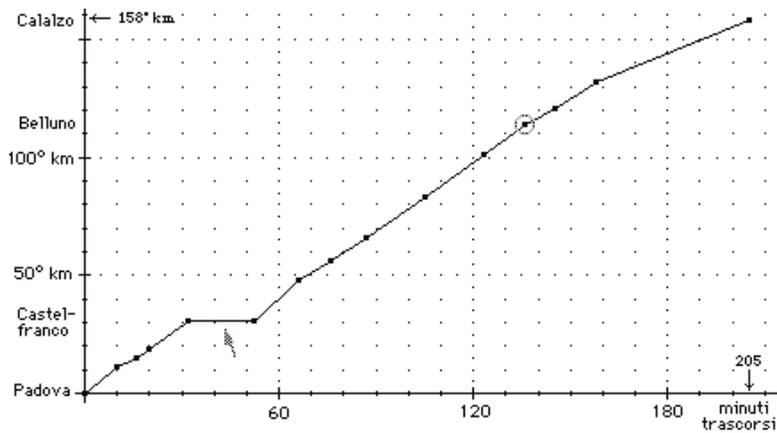
3 Calcolate la *velocità media* con cui il treno percorre il tratto Padova-Calalzo.

distanza (Padova-Calalzo) = [   ] km tempo (Padova-Calalzo) = [   ] min

velocità (Padova-Calalzo) = distanza/tempo = [   ] km/h

Nota: 1 h = 60 min; quindi per passare da una velocità in km/min al suo valore in km/h occorre moltiplicare per 60.

Velocità intorno ai 50 km/h non sono certo da "freccia": sono di poco superiori alle velocità che riesce a tenere un ciclomotore. La signora Van Per Tren, per valutare se la bassa velocità media può dipendere dalla lunghezza delle soste nelle stazioni e dal fatto che vi sono molte fermate (le quali, in ogni caso, rallentano la marcia) decide di rappresentare su carta quadrettata il ***moto del treno*** (vedi *figura 5*).

figura 5

I pallini neri rappresentano la posizione del treno lungo la linea ferroviaria al trascorrere del tempo, ad esempio quello evidenziato col cerchietto rappresenta il fatto che, secondo la tabella, alle 17:46, dopo 136 minuti dalla partenza, il treno è alla stazione di Belluno.

I pezzi di grafico orizzontali rappresentano le soste nelle stazioni. Ad es. durante il tragitto Padova-Calalzo il treno sosta a Castelfranco tra le 16:02 e le 16:22, cioè per 20 minuti, dal 32° al 52° minuto dalla partenza; ciò è rappresentato dal tratto orizzontale (indicato dalla freccia) tracciato in corrispondenza di Castelfranco.

I Van Per Tren osservano che dove vi sono molte fermate il grafico non ha pendenza inferiore. Ciò fa svanire l'ipotesi che la lentezza del treno sia dovuta soprattutto alle molte fermate. Ma viene un'altra idea: la causa principale può essere la natura del percorso: è una linea ferroviaria che dalla pianura va in montagna; quindi avrà da superare tratti in salita e, presumibilmente, tratti con numerose curve; se le locomotrici non sono molto efficienti e la strada ferrata non è in buono stato difficilmente si possono tenere alte velocità.

4 Da fig. 5, esaminando le pendenze, individuate il tratto tra due fermate successive in cui il treno è più lento e quello in cui è più veloce. Quindi usando la tabella (3.1) calcolate la velocità media del treno in tali tratti.

tratto più lento .... velocità ....

tratto più veloce .... velocità ....

Il tratto in cui il treno viaggia più lentamente è anche il più lungo, e quindi quello in cui la velocità media risente meno delle fasi di partenza e arrivo in stazione. Ciò sembra confermare l'idea dei Van Per Tren che la lentezza del treno dipenda dalla natura del percorso. Consideriamo il ***profilo altimetrico*** della linea Padova-Calalzo, in modo da vedere se il tratto in questione affronta effettivamente una zona particolarmente montuosa.

In *figura 6* il profilo è stato rappresentato impiegando la stessa scala per la distanza da Padova lungo la linea ferroviaria (asse orizzontale) e per la altitudine (asse verticale): 10 km sono stati rappresentati con segmenti di eguale lunghezza sui due assi.

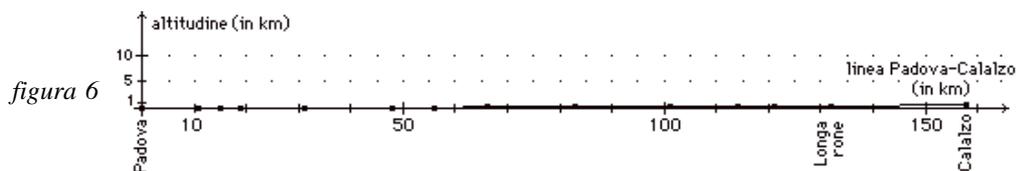



figura 6

Per esaminare meglio come varia la pendenza della linea ferroviaria *dilatiamo* il grafico verticalmente. Otteniamo (*figura 7*) un *modello* meno fedele ma che consente di distinguere meglio i tratti con diversa pendenza. Viene in particolare evidenziato come l'ultimo tratto (Longarone-Calalzo) sia quello con la maggiore pendenza.

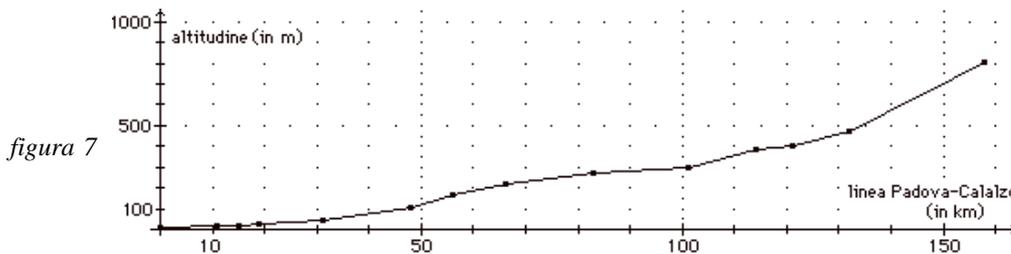



figura 7

Come si può esprimere in forma più precisa il concetto di ***pendenza***? Indicando di quanti metri (o centimetri, millimetri, …) si innalza la strada ogni 100 metri (o centimetri, millimetri, …) di avanzamento in orizzontale.

Ad esempio il cartello stradale riprodotto in *figura 8*, a sinistra, segnala una discesa pericolosa con pendenza del 8% (8 *per cento*): la strada è inclinata come il triangolo disegnato a destra, che ha la base lunga 100 unità di misura e è alto 8 unità di misura. In altre parole il *rapporto* tra spostamento verticale e spostamento orizzontale è lo stesso che intercorre tra 8 e 100: 8/100 = 0.08 = 8 centesimi.

Se percorro un tratto di discesa che corrisponde ad uno spostamento orizzontale di 25 metri mi abbasso di 8 centesimi di 25 metri, cioè di 25·0.08 = 2 metri.

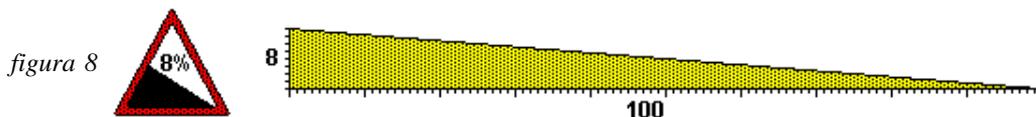



figura 8

Si noti che nel caso delle pendenze stradali, che possono arrivare a valori di poco superiori al 10%, non c'è grande differenza tra lunghezza della strada percorsa e avanzamento orizzontale. Ad esempio nel caso sopra raffigurato la base del triangolo e il lato obliquo hanno lunghezza pressoché eguale. In particolare, nel caso della nostra linea ferroviaria, che come abbiamo visto (vedi figura 6) è assai meno inclinata del triangolo raffigurato, possiamo considerare praticamente eguali l'avanzamento in orizzontale e la lunghezza della strada ferrata percorsa.

5 Da fig. 7 si vede che il dislivello tra Longarone e Calalzo e poco più di 300 m. La distanza tra Longarone e Calalzo è circa 25 km, cioè 25000 m. Qual è, approssimativamente, la pendenza di questo tratto di linea?

rapporto tra dislivello e distanza = 300/25000 = 0.012 = ... centesimi = ...%

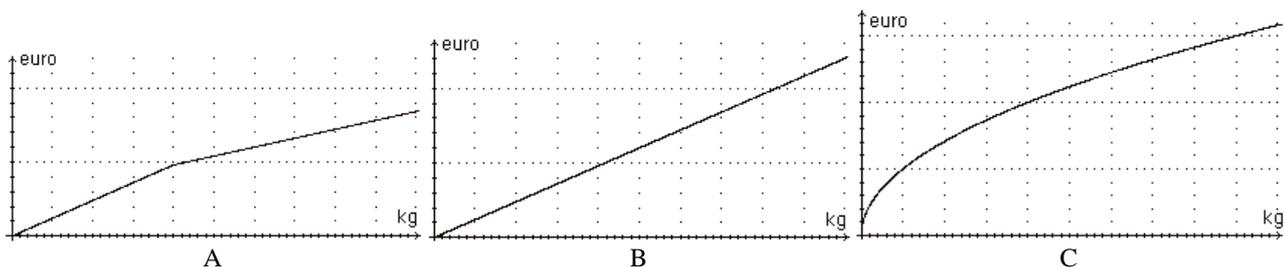
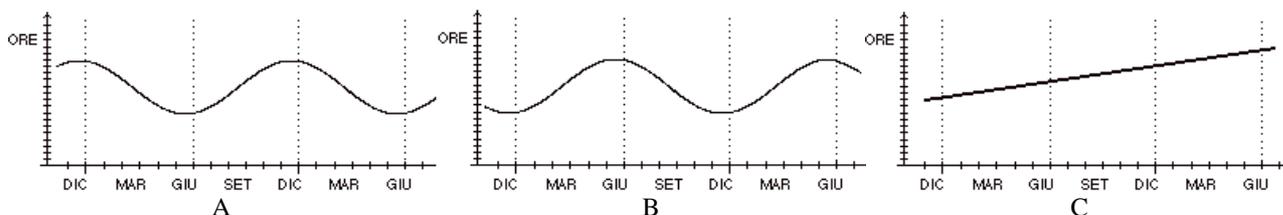
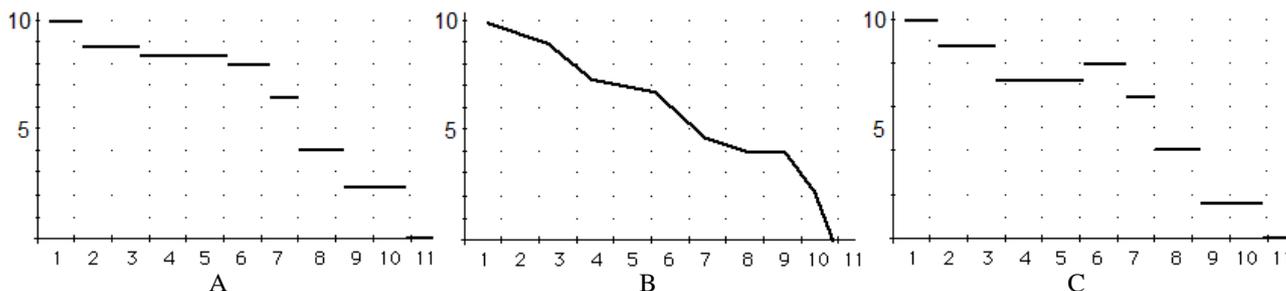
4. Esercizi

In questa seconda scheda abbiamo richiamato altri tipi di ***modelli matematici***: tabelle e equazioni per esprimere il legame tra due grandezze (nel nostro caso tra percorrenza e prezzo) e loro rappresentazioni grafiche, i concetti di rapporto e di proporzionalità, il concetto di pendenza, …

Abbiamo visto anche in questa scheda che l'impiego di modelli matematici opportuni, per quanto spesso dia luogo a rappresentazioni semplificate delle situazioni, può *facilitare* le *decisioni*, la *comunicazione*, la *comprensione dei fenomeni*, …

Negli *esercizi* che seguono vi vengono proposte alcune attività relative agli esempi e agli strumenti matematici considerati nella scheda.

e1 Scrivi su un foglio le frasi con cui spiegheresti per telefono come calcolare approssimativamente il prezzo del viaggio Belluno-Calalzo in un treno di categoria B a una persona che abbia sottomano un orario ferroviario simile a quello dei Van Per Tren (indice grafico in prima pagina, quadri orari nelle pagine successive). Supponi che la persona non abbia pratica di orari ferroviari e che tu non abbia sottomano un orario ferroviario e una calcolaltrice per dirgli direttamente il prezzo. Ricorda che devi spiegare alla persona sia come calcolare il chilometraggio che come da questo risalire al prezzo del biglietto.

e2 Quale tra i tre grafici A, B e C potrebbe rappresentare quanto si deve pagare in un negozio per l'acquisto di una certa quantità di patate? Perché hai escluso gli altri due grafici?

e3 Quale tra i tre grafici seguenti potrebbe rappresentare le ore di sole tra il novembre 2008 e l'agosto 2010? Perché hai escluso gli altri due grafici?

e4 A Mario si è rotto il cellulare e, in attesa di mettere insieme i soldi per comprarsene un altro, acquista una scheda telefonica da 10 € e la esaurisce con varie telefonate in una decina di giorni. Quale dei tre grafici seguenti potrebbe rappresentare il valore della scheda telefonica di Mario dal momento dell'acquisto a quello del suo esaurimento? Perché hai escluso gli altri due grafici?

e5 Provate a calcolare *mentalmente* (come fareste in una situazione normale, senza ricorrere a meccanismi di calcolo scolastici) il tempo (in min) che trascorre tra le seguenti coppie di ore e descrivete su un foglio il ragionamento che avete impiegato per ciascuna di esse.

(a) dalle 18:11 alle 21:20, (b) dalle 13:26 alle 15:24, (c) dalle 10:57 alle 16:29,
(d) dalle 7:38 alle 9:06.

e6 Indichiamo con m i minuti trascorsi tra l'ora $h1{:}m1$ e l'ora $h2{:}m2$ dello stesso giorno (ad esempio nel caso (a) del quesito e5 $h1$ è 18, $m1$ è 11, $h2$ è 21 e $m2$ è 20 mentre m, se hai fatto i calcoli giusti, è 189). Si vuole preparare un programma per calcolare m mediante un calcolatore. Quale o quali tra le seguenti formule è corretto impiegare? (in aiuto o a conferma delle tue conclusioni *fai* una verifica con i dati del quesito 10) Prova a spiegare gli errori commessi nella o nelle formule scorrette.

(1) $m = (h2\cdot 60 + m2) - (h1\cdot 60 + m1)$ (2) $m = (h2 - h1)\cdot 60 + (m2 - m1)$

(3) $m = h2\cdot 60 + m2 - h1\cdot 60 + m1$ (4) $m = (h2 - h1)\cdot 60 + m2 - m1$

La matematica e i suoi modelli

Un esempio tratto dalla vita quotidiana

Scheda **3**

1. I modelli

In questa unità didattica introduttiva abbiamo richiamato vari esempi di *modelli matematici*, cioè di concetti matematici impiegati per rappresentare situazioni di vario tipo, ad esempio i numeri, per rappresentare misure di grandezze, e le equazioni, per esprimere relazioni tra grandezze. *Provate a citare* qualche altro modello matematico visto in questa unità didattica.

Vediamo ancora alcuni esempi di ***modelli***, riferiti a discipline e campi diversi.

• La *figura 1* è un modello grafico che rappresenta una situazione della attività agricola tipica dei paesi sottosviluppati. Questa situazione spesso viene chiamata *circolo vizioso della miseria*, espressione che sta a indicare un fenomeno che di per sé non ha vie d'uscita: la povertà dei raccolti mantiene la popolazione in stato di miseria e a causa della miseria la popolazione non riesce a trovare i mezzi per migliorare i raccolti.

Si tratta di una rappresentazione grafica simile ai diagrammi di flusso. In questo caso le frecce non indicano il flusso dell'esecuzione ma relazioni di causa → effetto: la freccia "raccolti scarsi" → "sottoalimentazione" significa che a causa della scarsità dei raccolti la popolazione si nutre in misura insufficiente.

Completate il diagramma mettendo correttamente le frecce nell'"anello" superiore.

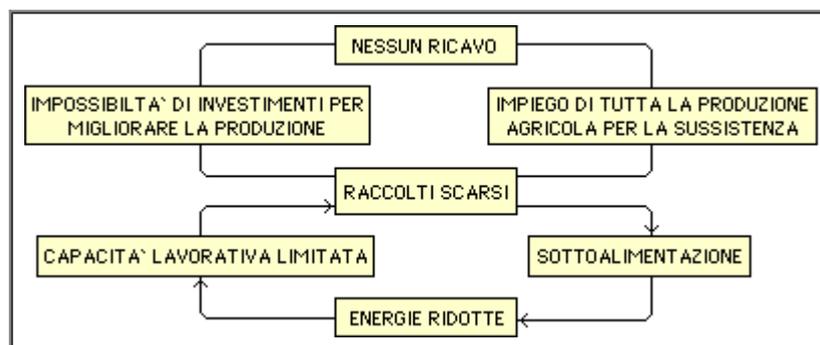



figura 1

Il significato del diagramma è abbastanza evidente: la povertà dei raccolti comporta sia (vedi l'anello inferiore) sottoalimentazione, e quindi limitazione della capacità lavorativa, sia (vedi l'anello superiore) l'impossibilità di vendere o accumulare una parte della produzione in modo da realizzare interventi per migliorare la coltivazione (macchinari, fertilizzanti, piante più produttive o resistenti, opere di irrigazione, ...).

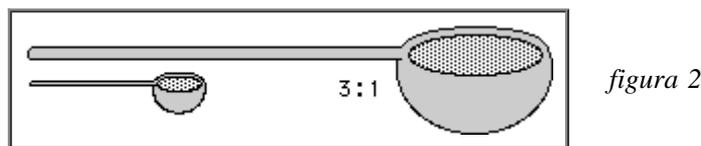
Senza interventi "esterni" queste popolazioni contadine non sono in grado di uscire da questo circolo vizioso. Il doppio anello sta a indicare che non bastano aiuti alimentari (che possono ridurre temporaneamente solo il fenomeno rappresentato dall'anello inferiore) ma occorre un intervento volto a migliorare l'attività agricola: invio di macchinari, costruzione di impianti per produrre macchinari, aiuti per lo sviluppo delle vie di comunicazione, dell'istruzione scolastica, ... , rapporti di mercato più equo (con "prezzi" stabiliti non solo nell'interesse dei paesi più ricchi), ...

Il modello individua solo i fattori più importanti, trascurandone altri che possono essere rilevanti in situazioni specifiche: mutamenti climatici o interventi dannosi (impiego non controllato di prodotti chimici, coltivazioni intensive di particolari piante, ...) che possono insterilire il terreno, forme di cooperazione tra i contadini che consentono di distribuire le spese per macchinari, irrigazione, ...

• In *figura 2* è raffigurato un mestolo e un suo modello ingrandito (realizzato nello stesso materiale, legno o metallo) in scala 3 a 1. Volendo immaginare una situazione realistica possiamo pensare che il mestolone sia stato fatto realizzare in questo modo a un artigiano (falegname o fabbro) per impiegarlo in una "Sagra del Minestrone".

Il mestolone riproduce il mestolo originale esattamente sia per forma che per materiale. Ma al primo impiego per estrarre la minestra dal pentolone il manico cede (si spezza o si piega, a seconda del materiale).

Sapete spiegare come ciò sia possibile?

figura 2

• Una nota *regola grammaticale* asserisce che «Un nome singolare terminante in -ie al plurale mantiene la stessa forma. Gli altri nomi singolari terminanti in -e passando al plurale cambiano -e in -i». Esempi: il cane → i cani, l'odore → gli odori, la cantante → le cantanti, la serie → le serie, la specie → le specie.

Vi sono tuttavia numerose eccezioni: il re → i re, il bue → i buoi, il caffè → i caffè, la moglie → le mogli, la superficie → le superfici, la cassaforte → le casseforti, il guastafeste → i guastafeste, il salvagente → i salvagente, il capostazione → i capistazione, ...

Poi vi sono nomi che non hanno plurale (il latte, la sete, l'equatore, il fogliame, ...).

Infine vi sono le parole di origine straniera: al plurale, quando si parla in italiano, mantengono la stessa forma. Ad es., per considerare parole connesse all'uso dei calcolatori: il file → i file (un file - termine inglese, che si legge «fail» - è un documento memorizzato mediante un calcolatore), il mouse → i mouse (il mouse - termine inglese, che si legge «maus» - è un dispositivo che consente di muovere liberamente la "penna" del calcolatore sullo schermo), la routine → le routine (una routine - termine francese, che si legge «rutin» - è un breve programma o una parte di programma che traduce uno specifico procedimento di calcolo).

Le regole grammaticali non rappresentano dunque fedelmente come si deve parlare. Sono solo dei modelli: con essi si cercano di individuare i modi in cui si manifestano più frequentemente certi comportamenti linguistici, al fine di dare dei punti di riferimento che aiutino le persone nella formulazione e nella comprensione dei discorsi.

Sapete trovare qualche eccezione alla regola «i nomi maschili terminanti in -o passando al femminile modificano -o in -a»?

• Anche i *proverbi* sono dei modelli. Ad esempio «rosso di sera buon tempo si spera» rappresenta il modo in cui in genere evolve un particolare fenomeno naturale.

Individuate tra i seguenti proverbi quelli che hanno la stessa "morale", cioè quelli che sono modelli della stessa norma di comportamento (le "morali" rappresentate in tutto sono tre):

1) «non dir quattro se non l'hai nel sacco»
2) «col tempo e con la paglia maturano le nespole »
3) «l'abito non fa il monaco»
4) «Roma non fu fatta in un giorno»
5) «non è tutto oro quel che luccica»
6) «non vendere la pelle dell'orso prima d'averlo ucciso»
7) «dai tempo al tempo»
8) «ride bene chi ride ultimo»

• Facciamo un ultimo esempio. Come le *fotografie* sono modelli delle situazioni fotografate (perdono la tridimensionalità, modificano parzialmente i colori, tagliano delle parti e altre non le mettono bene a fuoco, ...), così le *immagini mentali* che fissiamo nella nostra memoria sono modelli di ciò che abbiamo visto. Ma queste per certi aspetti sono più ricche, per altri più povere delle fotografie. Infatti memorizzando perdiamo molti aspetti su cui non abbiamo fissato l'attenzione e, nello stesso tempo, arricchiamo la nostra immagine inserendo aspetti che traiamo da altri ricordi o deduciamo dalle nostre conoscenze.

Se ci riflettete un attimo troverete sicuramente molti esempi che confermano questa osservazione. Comunque ricordiamo due tipi di esperimenti famosi.

Il primo si riferisce alle testimonianze oculari: nella costruzione degli identikit o nel riconoscimento mediante fotografie i ricordi sono spesso inconsciamente deformati dai pregiudizi, dai prototipi di criminale che il testimone ha in testa o dai suoi tentativi di interpretare i fatti (ad es. da molti esperimenti risulta che dopo la visione di un filmato di un delitto in cui non si vede mai il volto del colpevole la grande maggioranza dei "testimoni" pretende di riconoscerlo tra un gruppo di fotografie di volti di individui "sospetti").

Il secondo esperimento fa riferimento ai disegni in *figura 3*. Osservate i segmenti AB, CD, EF, GH. Provate mentalmente (senza misure o altri calcoli) a confrontare AB con CD ed EF con GH. Successivamente *verificate* le conclusioni suggerite dalle vostre impressioni con quelle che potete ottenere usando opportunamente la quadrettatura che fa da sfondo ai disegni.

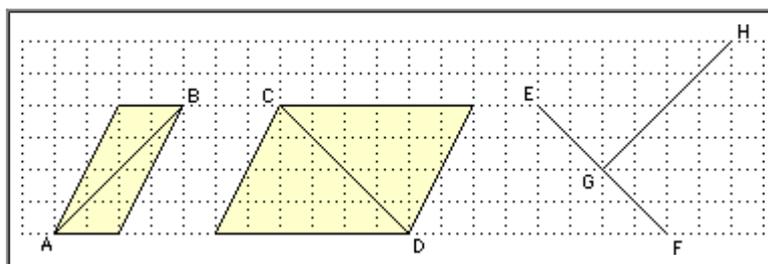



figura 3

• Anche il ritratto del volto di una persona ad opera di un grande pittore, secondo voi, è un modello di tipo diverso rispetto a una fotografia? In che senso?

2. Le discipline

Dopo tanti anni di scuola possiamo riflettere su che cosa sono ***le discipline***, cioè i campi in cui vengono organizzate le conoscenze e gli studi. Le materie scolastiche non sono altro che raccolte di argomenti che fanno capo a una o più discipline: nella scuola media in "Lettere" studiavate un po' di grammatica, un po' di storia della letteratura, ...; in "Osservazioni scientifiche" studiavate un po' di biologia, un po' di fisica, ...; ...

Tra i modelli che abbiamo richiamato nel paragrafo 1 alcuni non fanno capo a una specifica disciplina: i proverbi, le immagini mentali. Altri fanno invece parte di particolari discipline: il modello di figura 1 è impiegato in *geografia* economica; le regole grammaticali sono parti della *linguistica*; anche il problema del "mestolone" ha a che fare con le discipline: il problema di come al variare delle dimensioni di un certo oggetto possono variare altre caratteristiche (ad es. nel caso di un recipiente la resistenza delle pareti, nel caso di un teatro il modo in cui si diffondono i suoni, ...) è un problema tipico della *scienza delle costruzioni*.

<u>*Associate*</u> con delle linee ogni argomento elencato a sinistra con la disciplina (o le discipline) tra quelle elencate a destra a cui vi sembra faccia capo.

	• astronomia
accelerazione •	
avverbi •	• biologia
densità di popolazione •	
elettroni •	• chimica
equazioni •	
eredità genetica •	• fisica
gruppi sanguigni •	
iperbole •	• geografia
lunghezza dell'ombra di oggetti alla luce del sole •	
ottava •	• linguistica
probabilità •	
rapporti •	• matematica
risorgimento •	
trasformazioni di energia •	• storia
zuccheri •	
	• musica

Una ***disciplina*** può essere descritta come un sistema di conoscenze, terminologie, simboli, modelli volti a interpretare o spiegare una certa categoria di problemi o di fenomeni.

Ad esempio la *fisica* cerca di determinare i fattori e le condizioni che sono all'origine dei movimenti dei corpi, della trasmissione dei suoni e della luce, dei fenomeni elettrici, delle caratteristiche dei materiali, ...

La *linguistica* cerca di individuare i principali meccanismi attraverso cui, nelle varie lingue, a partire dai suoni vengono formate le parole, le frasi, i discorsi.

La ***matematica***, come le altre discipline, si sviluppa attraverso la messa a punto di modelli, la definizione di termini e simboli specifici, ..., ma, a differenza di esse, *non si occupa di una particolare area di fenomeni*.

I modelli della matematica vengono applicati alle situazioni più diverse. Si pensi alle quattro operazioni, alle percentuali e ai grafici, concetti matematici impiegati per rappresentare situazioni tratte praticamente da tutti i campi. Facciamo un esempio. Se abbiamo una tabella di dati che descrive come una grandezza cambia al variare di un'altra, noi sappiamo costruirne il grafico indipendentemente dal tipo di grandezze: per costruire il grafico di *figura 4* non impieghiamo considerazioni di fisica (1ª tabella), di geografia (2ª) o di economia (3ª), ma in tutti e tre i casi ci riferiamo solamente al valore numerico dei dati. Analogamente se dobbiamo calcolare il 12% di un certo dato, sappiamo applicare l'algoritmo di calcolo indipendentemente dal tipo di dato, non solo, ad esempio, nel caso in cui si tratti di uno sconto sul prezzo di un prodotto.

peso dell' oggetto appeso (kg)	allunga-mento della molla (cm)
0	0
1	0.7
2	1.4
3	2.1
4	2.8

distanza sulla cartina (cm)	distanza reale (km)
0	0
1	0.7
2	1.4
3	2.1
4	2.8

peso dei dolci (hg)	costo (euro)
0	0
1	0.7
2	1.4
3	2.1
4	2.8

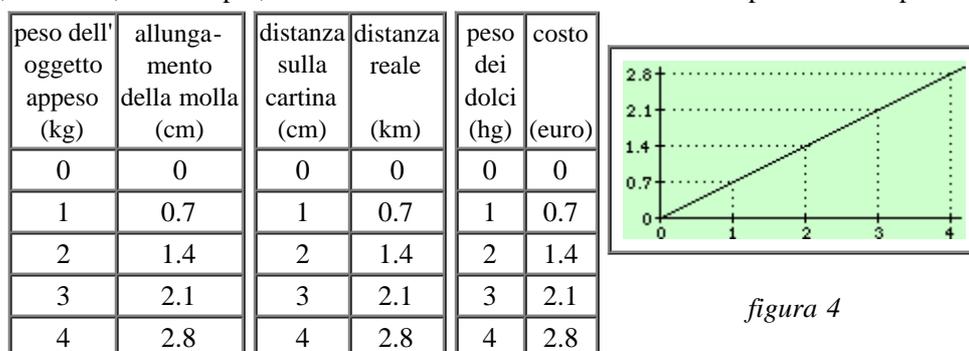



figura 4

Possiamo comportarci in questo modo poiché conosciamo questi concetti (grafico, percentuale) in "astratto". Più in generale tutti *i modelli matematici vengono definiti autonomamente, senza riferirsi a fenomeni particolari*, anche se si sono originati in particolari situazioni o attività. Ad es. i numeri, le operazioni, le prime proprietà aritmetiche si sono sviluppate essenzialmente nell'ambito delle attività di scambio economico; successiva è stata la loro descrizione in termini astratti.

Anche a scuola in genere si passa dall'introduzione dei concetti matematici in situazioni concrete a una loro definizione formale. Ad es. si può imparare a sommare e sottrarre valori monetari utilizzando alcune "equivalenze". Sapendo che [1 €] equivale a 2 [50 cent], che [50 cent] equivalgono a 5 [10 cent], ... e conoscendo alcune semplici addizioni (1 e 1 fanno 2, 3 e 4 fanno 7, ...) si possono fare gran parte dei calcoli economici elementari:

3 [1 €] e [50 cent] e [50 cent] fanno 3 [1 €] e [1 €] , cioè 4 [1 €].

Anche ai nostri giorni molte persone sanno operare solo in questo modo, senza saper rappre-sentare il calcolo come $3 + 0.5 + 0.5 = 4$. Anche noi in situazioni di questo genere procediamo mentalmente in modi simili. Ma per usare le addizioni in altri contesti o per usare una calcolatrice abbiamo dovuto imparare a rappresentare numeri e operazioni in "astratto".

3. Come studieremo la matematica

Secondo le indicazioni dei programmi in vigore in Italia per tutti gli ordini scolastici, dalla scuola elementare a quella superiore, l'obiettivo principale dell'insegnamento della matematica è far conoscere agli alunni i tipi di modelli matematici più diffusi nelle applicazioni, i linguaggi e le simbologie necessarie per impiegarli e le loro proprietà più importanti, la natura approssimata del loro uso per rappresentare situazioni reali, ...

Nel corso dell'anno *studieremo la matematica* cercando di tener presenti tutti questi aspetti, alternando:

• momenti in cui vedremo come un concetto matematico può originarsi dallo studio di una questione di altra natura e momenti in cui vedremo come la descrizione intuitiva di un concetto matematico può essere sostituita da una definizione formale (come nel passaggio da attività di calcolo con le monete ad attività di calcolo con i numeri),
• momenti in cui applicheremo la matematica e momenti in cui ne studieremo proprietà astratte,
• momenti in cui affronteremo situazioni nuove e momenti in cui ci "alleneremo" con esercizi più ripetitivi.

Rispetto a quanto previsto per la scuola media, da una parte applicheremo la matematica a situazioni più complesse, dall'altra studieremo i concetti matematici da punti di vista più generali.

Le statistiche

Alcuni modelli per la rappresentazione dei dati

Scheda **1**

I consumi e i redditti

0. Le statistiche

«Chi è il capocannoniere del campionato?», «Settembre 2008: record di precipitazioni», «Sono aumentati gli incidenti stradali», «Qual è la percentuale di italiani che evade le tasse?», «La popolazione italiana invecchia», «Al giovedì il programma serale più seguito dagli italiani è …», «Il Partito … ha guadagnato un punto percentuale rispetto alle precedenti elezioni», «Campionato di rugby: la capoclassifica sta tenendo una media di 39.2 punti per partita» … : ogni giorno sui giornali, alla televisione, nelle discussioni con gli amici, … ci troviamo di fronte a ***statistiche***, cioè alla valutazione dei fenomeni più disparati mediante numeri o rappresentazioni grafiche che ne indicano la frequenza o le dimensioni o l'incidenza o le variazioni nel tempo o …

Si tratta dell'uso della matematica socialmente più diffuso dopo la misura del tempo (lettura dell'orologio, calcolo del tempo trascorso, …) e il calcolo economico (calcolo del costo di un prodotto a partire dal costo unitario, calcolo del resto, …). E si tratta dell'uso che presso la maggioranza delle persone caratterizza il *ruolo della matematica*: «le cifre non mentono», «i dati parlano da soli» sono dei luoghi comuni assai diffusi che rivelano l'idea che le rappresentazioni matematiche dei fenomeni diano luogo a valutazioni rigorose. Questo pregiudizio è spesso sfruttato da chi vuole convincere gli altri della bontà delle proprie scelte o della convenienza del prodotto che vende o del fatto che le cose in un certo campo vanno bene o vanno male: si "sparano" un po' di percentuali e di grafici, come a dire «le cose stanno così: lo dice la matematica».

«2+2 fa 4» è un fatto matematico che non può essere messo in discussione. Ma, anche se si fanno esattamente i calcoli numerici, non è detto che si siano presi i dati più significativi o che si sia scelto il modello matematico più adeguato per rappresentare il fenomeno da analizzare. I dati statistici vanno letti e *interpretati* per quello che sono, senza trarre conclusioni errate e cercando di valutare criticamente quelle che gli altri ci propongono.

In questa ***unità didattica*** verranno presentati e discussi alcuni dei modelli matematici più utilizzati nelle statistiche diffuse dai mezzi di informazione. Prenderemo in considerazione esempi riferiti a campi diversi, scelti tra quelli di interesse più generale: l'economia delle famiglie (consumi e redditi), lo sport (i record), le caratteristiche fisiche della popolazione (dimensioni e sviluppo del corpo), la scuola (promossi, bocciati, abbandoni, …). In questa ***prima scheda*** vedremo l'impiego di alcuni strumenti matematici per elaborare statistiche sui *consumi* e sul *reddito* in Italia, con particolare riferimento alle condizioni di vita nel corso del Novecento. I dati impiegati sono in gran parte tratti dalle pubblicazioni dell'*Istat* (Istituto nazionale di statistica), che raccoglie ed elabora informazioni relative a numerosi aspetti sociali ed economici dell'Italia.

1. Rappresentazioni dei numeri

Nella tabella (1.1) è riportato quanto si è speso in beni di consumo (alimenti, vestiti, automobili, …) e in servizi (taglio dei capelli, viaggi in treno, …) in Italia. I dati si riferiscono ai consumi "finali" (ad esempio viene conteggiato quanto paga per una bibita chi va al bar ma non quanto la bibita è stata pagata dal proprietario del bar). Inoltre sono state escluse le spese fatte da enti "pubblici" (ad esempio i soldi spesi dai Comuni per le divise dei vigili). Per questi motivi i dati riportati nella tabella vengono chiamati *consumi finali interni privati*. Nel seguito spesso li chiameremo più semplicemente ***consumi***.

(**1.1**)

anno	alimentari	tabacco	vestiario	abitazione	trasporti	altro	*totale*
in milioni di lire							
1926	77 749	3 226	17 659	6 849	3 420	15 302	*124 205*
1945	941 645	13 189	50 572	19 307	12 857	160 700	*1 198 270*
in miliardi di lire							
1965	10 213	734	2 154	2 305	2 014	6 532	*23 952*
1985	116 148	9 306	35 756	45 238	58 919	168 733	*434 100*
in milioni di euro							
2008	137 460	17 587	71 380	198 404	120 769	392 331	*937 931*

1 È vero che i consumi totali del 1985 sono inferiori a quelli del 1945?

....

2 Scrivi *in lettere* i consumi totali del 2008.

....

3 Scrivi *in cifre*, esprimendoti in lire invece che in milioni o miliardi di lire, i consumi totali del 1945 e del 1985.

del 1945: .... del 1985: ....
Secondo te perché nella tabella si sono usate unità di misura diverse?

....

....

I due dati scritti per esteso sono uno molto più grande dell'altro. Si usa dire anche che hanno ***ordini di grandezza*** diversi. Più precisamente nel caso di 434100 miliardi si dice che l'ordine di grandezza è *delle centinaia di migliaia di miliardi*, infatti il "4" sottolineato indica che l'ammontare è composto da 4 volte 100000 miliardi (e poi da 3 volte 10000 miliardi, 4 volte 1000 miliardi e 1 volta 100 miliardi).

[clicca per ingrandire]

4 Qual è l'ordine di grandezza di 1 198 270 000 000? ....

Nota 1. Per rendere più "leggibile" il numero 1198270000000 spesso, come abbiamo fatto nel quesito, si scrive 1 198 270 000 000, separando con degli spazi bianchi le cifre prese a tre a tre a partire dalla cifra delle unità. In questo modo ci è facile leggere il numero come 1 198 270 000 migliaia o come 1 198 270 milioni o come 1198 miliardi e rotti.

A volte si usa anche la scrittura: 1˙198˙270˙000˙000. Sono usate anche:

- 1.198.270.000.000 (ma ciò si può fare solo se per separare parte intera e parte frazionaria di un numero si usa "," invece di "." : 1333 e 5 decimi → 1.333,5);
- 1,198,270,000,000 (ma ciò si può fare solo se per separare parte intera e parte frazionaria di un numero si usa "." invece di "," : 1333 e 5 decimi → 1,333.5).

Nota 2. A volte, considerando ad esempio il numero 857, non si dice che ha ordine di grandezza *delle centinaia* ma che ha ordine di grandezza *del migliaio* perché 857 è "vicino" a 1000. Analogamente del numero 9306 miliardi si può dire sia che ha ordine di grandezza *delle* migliaia di miliardi, sia che ha ordine di grandezza *della* decina di migliaia di miliardi (è vicino a 10000 miliardi).

5 Come fai a calcolare con una *calcolatrice tascabile* (d'ora in avanti useremo spesso "*CT*" al posto di "calcolatrice tascabile" o "calcolatrici tascabili") i consumi totali mensili degli italiani nel 1945, cioè 1 198 270 000 000 : 12 ? (tieni conto che una CT in genere è in grado di visualizzare solo 8 o 10 cifre, non tutte le 13 cifre del 1° termine della divisione)

....

6 Una persona ha sostenuto le seguenti spese (in euro): 28.50, 1.25, 160.30, 0.50, 4.65. Per calcolare il totale batte sulla sua CT:

2850 [+] 125 [+] 16030 [+] 50 [+] 465 [=]

Ottiene 19520. Quant'è la spesa totale? Perché la persona ha proceduto in questo modo, invece di battere:

28.50 [+] 1.25 [+] 160.30 [+] 0.50 [+] 4.65 [=] ?

....

....

7 Completa quanto segue:

54300000 = _54.3_ milioni

1.1 milioni = _1100000_ ← *in cifre*

1 100 000 000 = _______ miliardi

436.2 miliardi = __________ ← *in cifre*

1250 = _______ migliaia

21.2 migliaia = ________ ← *in cifre*

41 610 000 000 000 = _______ decine di migliaia di miliardi

[clicca per ingrandire]

figura 1

Molte CT consentono di effettuare calcoli operando su (e ottenendo come risultati) numeri costituiti da più di 8 o 10 cifre.

Provate a calcolare con la vostra CT: 730000·57000000.

Molti di voi otterranno un risultato come quello che appare nelle CT di *figura 1*.

La lettera e che compare sulla CT di sinistra (in quella a destra al suo posto c'è uno spazio bianco) sta per "esponente". Infatti questa scritta è una abbreviazione di:

$$4.161 \cdot 10^{13} = 4.161 \cdot 10\,000\,000\,000\,000 \text{ (13 zeri)}$$

13 è l'esponente della potenza di 10 per cui deve essere moltiplicato il numero scritto a sinistra di e, cioè $10^{13} = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10$ (13 volte 10) è l'"unità di misura" con cui viene rappresentato il numero.

Anche chi usa la CT può usare scritte analoghe per battere numeri che altrimenti non starebbero sul visore. Infatti in queste CT è presente un tasto [E] (a volte indicato con EXP o EE o IE, come in fig. 1). Ad esempio per calcolare 37 miliardi : 128 si può battere: 37 [E] 9 [÷] 128 [=]

8 A lato è descritto un modo in cui è eseguibile il calcolo del quesito 5. Completa la descrizione e riporta il risultato ottenuto con la CT.

119827 [E] ... [÷] 12 [=]

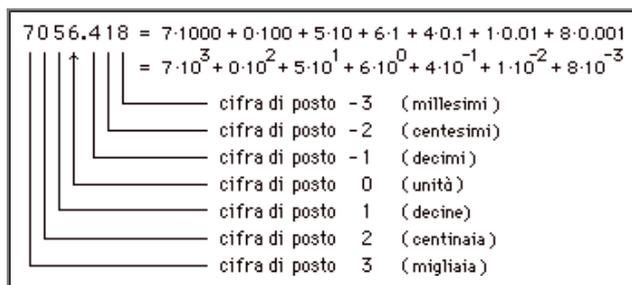
....

Osservate il riquadro a fianco:

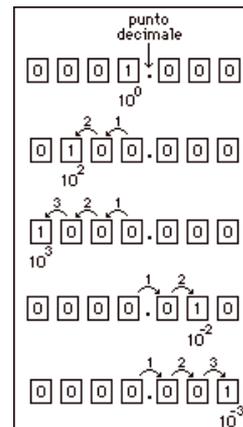
Esso ricorda che cosa si intende per ***posto di una cifra***.

Ad esempio: 7 (cifra delle migliaia o di posto 3) indica quante volte deve essere preso 1000, cioè la potenza 10^3; 8 (cifra dei millesimi o di posto –3) indica quante volte deve essere preso 0.001, cioè la potenza 10^{-3}.

$7056.418 = 7 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 1 + 4 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.01 + 8 \cdot 0.001$
$= 7 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3}$

cifra di posto -3 (millesimi)
cifra di posto -2 (centesimi)
cifra di posto -1 (decimi)
cifra di posto 0 (unità)
cifra di posto 1 (decine)
cifra di posto 2 (centinaia)
cifra di posto 3 (migliaia)

In altre parole una cifra ha posto *n* se è spostata di *n* posizioni (in avanti se *n*>0, indietro se *n*<0) rispetto a quella di ***posto 0***, cioè rispetto alla cifra delle unità.

Infatti in una *potenza di 10* l'esponente indica la posizione in cui va scritta la cifra "1":

10^2 per esteso diventa 100 (2 posizioni *dopo* il posto 0),
10^{-2} diventa 0.01 (2 posizioni *prima* del posto 0).

Avanzare di 1 posto equivale a moltiplicare per 10, avanzare di 2 posti (cioè moltiplicare due volte per 10) equivale a moltiplicare per 100, …
Analogamente retrocedere di 1 posto equivale a dividere per 10, retrocedere di 2 posti (cioè dividere due volte per 10) equivale a dividere per 100, …
Quindi, come 10^n (dove n può essere 1, 2, 3, 4, …, cioè un qualunque numero intero positivo) non è altro che il risultato della ripetizione della moltiplicazione per 10, così 10^{-n} non è altro che il risultato della ripetizione della divisione per 10:

$$0.1 = 10^{-1} = 1/10 = 10^1$$
$$0.01 = 10^{-2} = 1/10/10 = 1/100 = 10^2$$
$$0.001 = 10^{-3} = 1/10/10/10 = 1/1000 = 10^3$$

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n}$$

Oltre a quanto visto per le potenze di 10, abbiamo che:

2^3 sta per $2·2·2$ 7^4 sta per $7·7·7·7$ x^2 sta per $x·x$

Più in generale la scrittura a^n (n numero intero positivo) sta per $a·a·a·…·a$ dove a compare n volte (a^1 sta per a, a^2 sta per $a·a$, a^3 sta per $a·a·a$, …).

Il risultato del calcolo di a^n viene chiamato ***potenza*** n-esima ("ennesima") di a. L'operazione con cui a partire da a e n si ottiene a^n viene detta *elevamento* di a alla *potenza* n-esima. a e n vengono chiamati rispettivamente *base* ed *esponente* dell'elevamento.

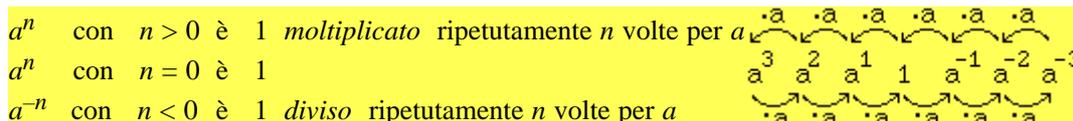
9 Completa, se possibile, quanto segue (prima osserva i due esempi):

$25 = 5^{…}$? faccio: $1 \xrightarrow{·5} 5 \xrightarrow{·5} 25$; deduco che $25=5^2$
$186 = 6^{…}$? faccio: $1 \xrightarrow{·6} 6 \xrightarrow{·6} 36 \xrightarrow{·6} 216$; deduco che non esiste n tale che $186=6^n$

$16 = 4^{…}$ $10 = 5^{…}$ $81 = 9^{…}$ $5 = 5^{…}$ $16 = 2^{…}$ $81 = 3^{…}$ $27 = 9^{…}$

Se a è diverso da 0 si possono considerare anche le potenze di a con esponente non positivo. Ad esempio 2^{-3} sta per 1/2/2/2. Riassumendo:

a^n con $n > 0$ è 1 *moltiplicato* ripetutamente n volte per a
a^n con $n = 0$ è 1
a^{-n} con $n < 0$ è 1 *diviso* ripetutamente n volte per a

·a ·a ·a ·a ·a ·a
a^3 a^2 a^1 1 a^{-1} a^{-2} a^{-3}
:a :a :a :a :a :a

Generalizzando quanto visto per il numero 10, osserviamo che dividere ripetutamente n volte per un numero a equivale a dividere per a^n; quindi:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (1.2)$$

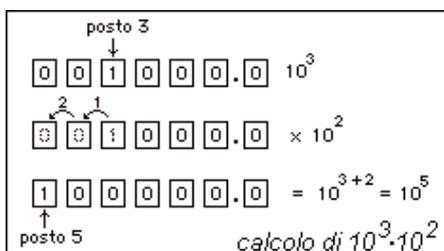
10 **(A)** *Osserva:*

$0.111… = 3^{…}$? $1 \xrightarrow{/3} 0.333… \xrightarrow{/3} 0.111…$; quindi: $0.111… = 1/3/3 = 3^{-2} = 1/3^2$

Completa:

$0.125 = 2^{…}$? $1 \xrightarrow{/2}$ . . .

(**B**) Poiché $8=2^3$ 1/8 equivale a 1/2/2/2. *Spiega* come calcoleresti a mente 68/8 sfruttando questa idea.

………

11 Utilizzando quanto suggerito dall'esempio a fianco completa i seguenti calcoli:

$10^6 · 10^7 = …$

$10^{-3} · 10^9 = …$

$10^{-2} · 10^2 = …$

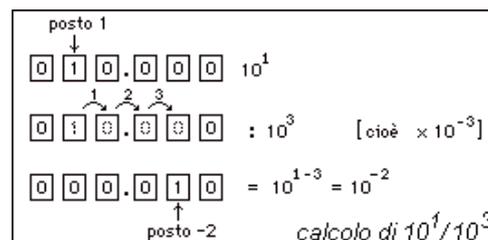
12 Usando quanto suggerito dall'esempio a fianco completa:

$10^6 / 10^4 = \ldots$

$10^6 \cdot 10^{-4} = \ldots$

$10 \cdot 10^{-5} = \ldots$

$10^2 \cdot 10^{-2} = \ldots$

$10^{-2} \cdot 10^{-5} = \ldots$

13 Un grano di polline ha lo spessore di circa 10^{-5} m (0.00001 m, cioè 0.01 mm, pari a un centesimo di millimetro). Il diametro della Terra è di circa 10^7 m (cioè 10000 km, infatti $10000 = 10^4$, $1 \text{ km} = 10^3$ m e $10^4 \cdot 10^3 = 10^{4+3} = 10^7$).

Quanti grani di polline occorrerebbe sovrapporre per ottenere una pila spessa come la Terra, cioè quante volte 10^{-5} m sta in 10^7 m? (esprimi il risultato sia come potenza di dieci che a parole)

....

14 Per rappresentare 10^{20} su una CT si può battere 1 [E] 20 (che sta per $1 \cdot 10^{20}$). Per 10^{-5} occorre invece battere 1 [E] 5 [+/-]. Infatti per visualizzare –5 occorre battere 5 e poi cambiargli segno con l'apposito tasto. Utilizzando la CT controlla i calcoli del quesito 12.

Quanto visto nei quesiti 11 e 12 può essere riassunto nell'unica *formula* seguente (dove m e n rappresentano numeri interi qualunque, positivi o negativi o nulli):

$$10^m \cdot 10^n = 10^{m+n}$$

Infatti ad esempio $10^6 \cdot 10^{-4} = 10^{6-4}$ può essere riscritta come $10^6 \cdot 10^{-4} = 10^{6+(-4)}$.

Anche $10^6/10^4$ può essere trasformato in $10^6 \cdot 10^{-4}$ e calcolato usando questa formula. Tuttavia può essere comodo ricorrere direttamente alla *formula*:

$$\frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$$

Ricordiamo che, più in generale, se a è un qualunque numero positivo o negativo e m e n sono numeri interi (positivi o negativi o nulli), valgono le formule:

$$(\mathbf{1.3}) \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad (\mathbf{1.4}) \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

15 Se sostituisci a m il numero 0 e poi esegui i calcoli che si possono fare, come si trasforma la formula (1.4)? ....

16 Il tasto [1/x] della CT a sinistra in ➨ figura 1 corrisponde al tasto [x⁻¹] della CT a destra: entrambi trasformano il numero che appare sul visore nel suo ***reciproco***. Con la CT trova il reciproco di 10, 4, 0.1, 0.2, 0.25, 5. Poi spiega (servendoti di una delle formule viste) l'equivalenza tra le due espressioni (1/x e x^{-1}) utilizzate per indicare i tasti delle due CT.

numero	10	4	0.1	0.2	0.25	5
suo reciproco						

....

....

La scrittura di un numero nella forma $h \cdot 10^n$ ($37 \cdot 10^9$, $43.5 \cdot 10^{23}$,…) viene detta ***notazione_esponenziale***.

Le CT esprimono i risultati che non stanno per esteso sul visore in una particolare forma esponenziale, detta ***notazione scientifica***, di cui abbiamo già visto un esempio nella ➨ figura 1: il numero 41 610 000 000 000, la cui prima cifra ha posto 13, viene rappresentato come $4.161 \cdot 10^{13}$. Altri esempi:

7412.5 ha ordine di grandezza delle migliaia; la prima cifra ha posto 3;

la sua rappresentazione in notazione scientifica è: $7.4125 \cdot 10^3$

0.000 001 305 la prima cifra diversa da 0 ha posto -6;

la sua rappresentazione in notazione scientifica è: $1.305 \cdot 10^{-6}$

In generale si tratta della notazione esponenziale $h \cdot 10^n$ che si ottiene prendendo come n il *posto* della prima cifra diversa da zero del numero.

h (che negli esempi precedenti è 4.161, 7.4125, 1.305) ha sempre una sola cifra (diversa da 0) a sinistra del punto decimale.

Invece di dire che 0.073 (= $7.3 \cdot 10^{-2}$) ha ordine di grandezza dei centesimi, si può dire più in breve che ha ordine di grandezza –2. Cioè si può definire ***ordine di grandezza*** di un numero l'esponente della sua scrittura in notazione scientifica.

17 Batti su una CT i seguenti numeri nella forma esponenziale indicata seguiti da [=]. Otterrai le loro espressioni in notazione scientifica; trascrivile e completa quanto segue.

12378 milioni = 12378E6 = … ordine di grandezza = …

0.236 miliardesimi = 0.236E–9 = … ordine di grandezza = …

2. Rappresentazioni proporzionali, istogrammi

Torniamo alla tabella (1.1). Il confronto diretto tra dati relativi ad anni diversi non è facile: non è possibile paragonare il valore di 1 lira nel 1945 con quello di 1 lira nel 1955 o nel 1985: il *potere di acquisto* è man mano diminuito; in altre parole è man mano aumentato il denaro necessario per comprare una stessa quantità di beni. Anche il potere di acquisto di 1 € ora è minore di quello che aveva nel 2002, quando è entrato in vigore.

Del resto è evidente che ad es. il consumo di sigarette, sigari, tabacco da pipa, … dal 1926 al 1985 non può essere cresciuto come è cresciuta la spesa in tabacco. Questa è passata da 3 miliardi a 9 mila miliardi, cioè si è moltiplicata per 3000, mentre la popolazione nel frattempo non è neanche raddoppiata (è passata da circa 40 milioni a circa 60 milioni): sicuramente un fumatore degli anni '80 non fumava migliaia di volte quanto fumava uno degli anni '20!

Visto che non ha senso confrontare direttamente le differenze di una singola voce di consumo da un anno all'altro, possiamo studiare come è cambiato il modo di spendere i soldi *esaminando come sono mutati i rapporti tra una voce di spesa e l'altra*. Alcuni cambiamenti balzano all'occhio osservando la tabella. Ad esempio nel 1945 si spendeva circa la stessa cifra in tabacco e in trasporti, nel 1985 si spendeva molto più in trasporti. Altri confronti sono meno evidenti. Vedremo ora dei metodi di rappresentazione dei dati che ci faciliteranno questo studio.

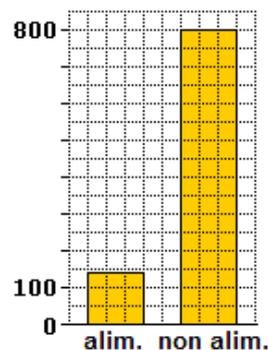
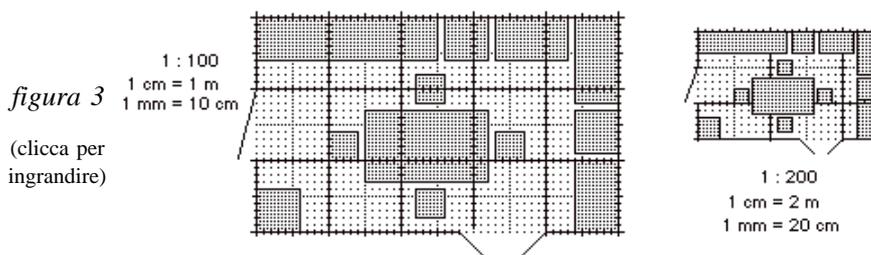
L'***istogramma*** in *figura 2* rappresenta graficamente i consumi alimentari e non alimentari nel 2008. Abbiamo deciso di rappresentare 100 miliardi di euro con l'altezza di 2 quadretti. Di conseguenza i consumi alimentari ($137469 \cdot 10^6$ €) sono stati rappresentati con poco più di 2 quadretti e quelli non alimentari ($800471 \cdot 10^6$ €) con 8 quadretti. Il confronto tra le altezze dei due rettangoli ci dà subito un'idea visiva del rapporto tra i due consumi. Infatti *il rapporto tra le altezze dei rettangoli è uguale al rapporto tra i dati che esse rappresentano*.

figura 2

Per comprendere meglio questo fatto facciamo riferimento alla *figura 3*, in cui sono raffigurate due diverse piantine su carta millimetrata della cucina di un appartamento. Le basi dei vari mobili sono state raffigurate tracciando lati con lunghezza pari alla lunghezza reale degli spigoli moltiplicata per la *scala*, cioè per il fattore di riduzione (vengono moltiplicate per 1/100, cioè divise per 100, in un caso, vengono moltiplicate per 1/200, cioè divise per 200, nell'altro).

Poiché tutte le distanze vengono moltiplicate per lo stesso fattore, i mobili *non* vengono rappresentati *sproporzionatamente*: sia in una piantina che nell'altra le basi dei mobili mantengono la forma che hanno nella realtà.

figura 3

(clicca per ingrandire)

18 Sotto è raffigurata in dimensioni reali (disegno A, con tratteggio fitto) la chiave di un piccolo armadietto. B e C sono due sue riproduzioni in scala: un ingrandimento e un rimpicciolimento.

(1) Qual è la scala di B, cioè per quale numero ho moltiplicato le dimensioni reali per ottenere B? ....

(2) Qual è la scala di C? ....

(3) Disegna una riproduzione di A in scala 4.

(4) Il disegno D ti sembra una riproduzione proporzionata di A? Perché? Con quali misure e calcoli puoi confermare questa tua impressione?

....

....

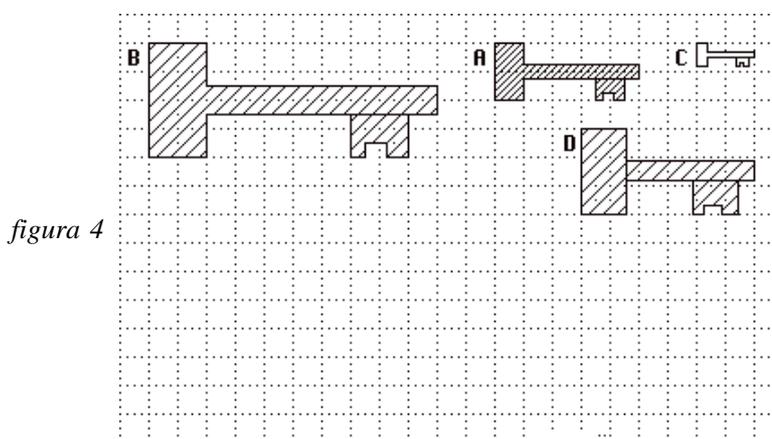
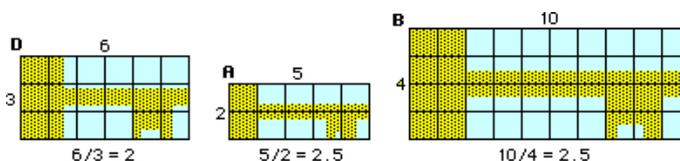



figura 4

La chiave riprodotta in D appare più tozza rispetto a quella raffigurata in A: per essere proporzionata come A dovrebbe essere più lunga. Per tradurre questa impressione in termini quantitativi possiamo calcolare il rapporto tra lunghezza della chiave e altezza dell'impugnatura: nel caso A (vedi figura seguente) è 2.5, cioè la lunghezza è 2 volte e 1/2 l'altezza; nel caso D è 2, cioè la lunghezza è 2 volte l'altezza. Invece nel caso B abbiamo, come in A, il rapporto 2.5.

Invece di calcolare 10/4 e trovare che il risultato è 2.5 come nel caso di 5/2, potevamo osservare direttamente che il rapporto 10/4 è uguale al rapporto 5/2. Infatti:

$$\frac{10}{4} = \frac{5 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{5 \cdot \cancel{2}}{2 \cdot \cancel{2}} = \frac{5}{2}$$

La scrittura $\frac{5 \cdot \cancel{2}}{2 \cdot \cancel{2}}$ sta a indicare che $\frac{5 \cdot 2}{2 \cdot 2}$ può essere "semplificato" e trasformato in $\frac{5}{2}$

Procediamo analogamente quando per fare 600/40 ci riconduciamo al calcolo di 30/2:

$$\frac{600}{40} = \frac{60 \cdot 10}{4 \cdot 10} = \frac{60 \cdot \cancel{10}}{4 \cdot \cancel{10}} = \frac{60}{4} = \frac{30 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{30 \cdot \cancel{2}}{2 \cdot \cancel{2}} = \frac{30}{2}$$

In pratica utilizziamo il fatto che:

se i termini di una divisione vengono entrambi moltiplicati – o entrambi divisi – per uno stesso numero (diverso da 0) il risultato non cambia.

Questa è la traduzione numerica di quanto abbiamo osservato a proposito delle riproduzioni in scala:

> *se le dimensioni di un oggetto* (i due lati del tavolo o la lunghezza e l'altezza della chiave o …) *vengono moltiplicate per la stessa scala, il rapporto tra tali dimensioni non viene modificato*.

Più in generale ogni volta che si moltiplica un insieme di dati per un fattore fissato si ottiene una rappresentazione *proporzionale* dei dati di partenza, cioè tale che il rapporto tra una coppia qualunque dei nuovi valori è uguale al rapporto tra la coppia dei valori originali. Per questo motivo una relazione del tipo:

(**2.1**) $$(grandezza2) = (grandezza1) \cdot k$$

dove k è un numero (diverso da 0) fissato, viene detta relazione di ***proporzionalità***.

Il numero k viene detto ***fattore di proporzionalità***. Nel caso particolare delle scale, se k>1 si parla di fattore (o scala) di *ingrandimento*, se 0<k<1 di fattore di *riduzione*.

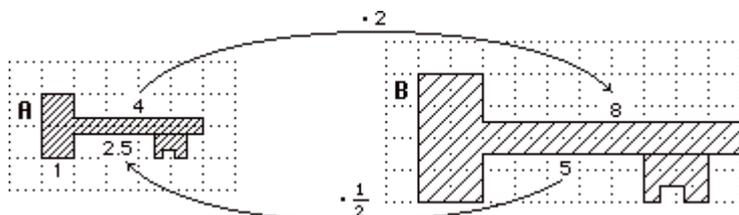
19 Completa le seguente tabella, relativa a quattro diverse rappresentazioni proporzionali.

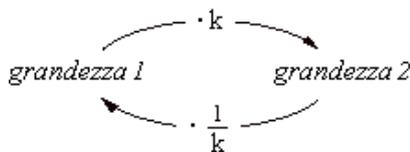
	grandezza1	*grandezza2*	*k*
fig. 3 a sinistra	distanza reale	distanza nella pianta	
fig. 3 a destra	distanza reale	distanza nella pianta	
figura 4	distanza in A		2
figura 2	valore monetario (in miliardi di €)		1/50

Anche nel caso della tabella ➨ (1.1) abbiamo una rappresentazione proporzionale: i dati reali sono stati rappresentati in milioni o in miliardi, cioè sono stati divisi per 1 milione o per 1 miliardo, ossia moltiplicati per $1/10^6$ (= 10^{6}) o per $1/10^9$ (= 10^{-9}).

Anche le relazioni inverse sono relazioni di proporzionalità. Ad esempio, riferendosi alla ➨ figura 4,

oltre a: *distanza in B* = (*distanza in A*) · 2

anche: *distanza in B* = (*distanza in A*) · $\frac{1}{2}$ è del tipo ➨ (2.1)

passando da A a B un tratto lungo 4 viene trasformato in un tratto lungo 4·2; passando da B a A un tratto lungo 5 viene trasformato in un tratto lungo 5·(1/2)

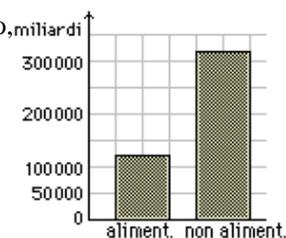
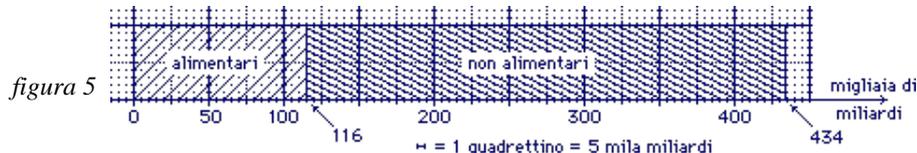
Generalizzando:

20 Se sulla CT batti 8 [1/x] [1/x] che cosa ottieni? … Descrivi questo fatto completando la frase:

Il reciproco del .... di 8 è 8.

3. *Rappresentazioni percentuali, approssimazioni*

A fianco è tracciato l'istogramma relativo al 1985 della ➨ tabella (1.1). Esso consente di valutare facilmente la dimensione di un tipo di consumo rispetto all'altro, ma non fornisce immediatamente un'idea di *quanta parte del consumo totale* sia ciascuno di essi.

Per una informazione di questo tipo è conveniente rappresentare i due rettangoli consecutivamente, con un ***diagramma a striscia*** come il seguente:

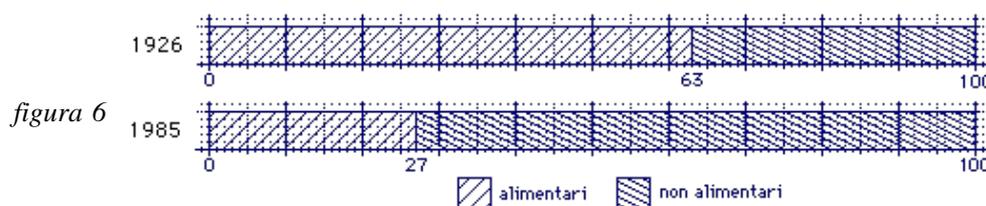
figura 5

21 Qual è il fattore di proporzionalità che moltiplicato per la lunghezza (in quadrettini) di un rettangolo dà il corrispondente valore reale?

fattore di proporzionalità (diagramma → realtà) ....

e il fattore inverso, che moltiplicato per ciascun dato dà la lunghezza (in quadrettini) del rettangolo corrispondente?

fattore di proporzionalità (realtà → diagramma) $\frac{1}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

Se vogliamo confrontare i consumi relativi ad anni diversi ci conviene utilizzare diagrammi a striscia della stessa lunghezza. Una scelta possibile è la seguente:

figura 6

Si può ad esempio osservare che l'incidenza dei consumi non alimentari nell'arco di 60 anni (cioè in due generazioni, dai nonni ai loro nipoti) è raddoppiata.

Le rappresentazioni sono state ottenute rappresentando il totale dei consumi con 100 quadrettini. Perché questa scelta?

Perché è *comoda*. Infatti da una parte, come vedremo fra poco, la scelta del numero 100 facilita i calcoli. Dall'altra i dati vengono rappresentati da numeri (di quadrettini) compresi tra 0 e 100, facili da ricordare e, per l'abitudine che abbiamo ad utilizzare sistemi di misura decimali (per es. a esprimere mezzo metro come 50 cm, un quarto di etto come 25 grammi, un terzo di litro come 33 cl, …), facili da confrontare tra loro e con il totale (100).

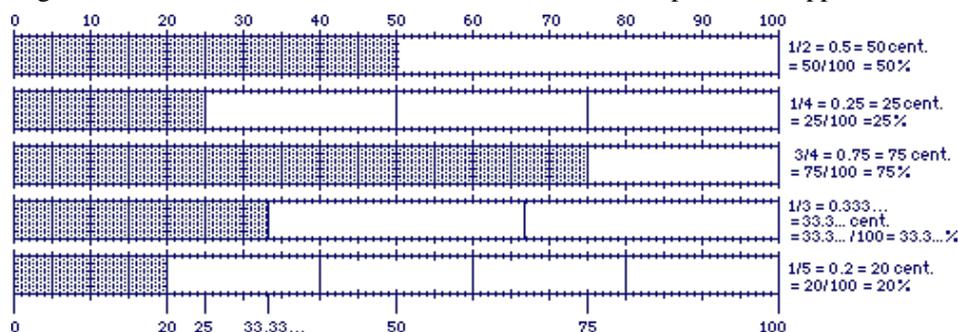
Possiamo addirittura fare a meno del diagramma: una volta che sappiamo che nel 1985 i consumi alimentari erano 27 centesimi del totale, riusciamo a immaginarci una striscia lunga 100 e una sua parte lunga 27, cioè pari a poco più di 1/4 di striscia.

Se invece del modello grafico si usa solo la rappresentazione delle parti sotto forma di *centesimi* del totale, si parla di rappresentazione in ***parti percentuali*** (o semplicemente *percentuali*). Questa espressione deriva dal fatto che al posto dell'espressione «27 centesimi» (27/100) si usa spesso l'espressione «27 *per cento*», scritta in genere così: *27%*.

22 Con diagrammi come quelli di fig. 6, si perdono delle informazioni sulla situazione rappresentata rispetto a diagrammi come quello di fig. 5; quali? In compenso quali informazioni in più si ottengono?

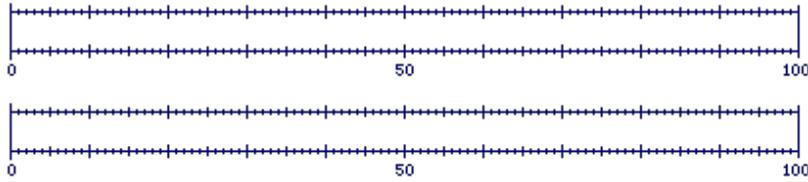
....

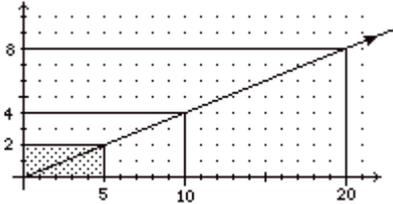
....

Il disegno seguente richiama e mette in relazione diversi modi di esprimere i rapporti.

23 Come suggerisce il disegno precedente, per rappresentare il rapporto tra 2 e 5 su una striscia graduata puoi procedere in due modi:

(1) dividere la striscia in quinti, cioè in 5 parti uguali, e prenderne 2; oppure:

(2) calcolare 2/5, esprimere il risultato in centesimi e considerare una quantità di segmentini pari al numero di centesimi così trovato

Procedi in entrambi i modi sulle due strisce riportate qui sotto.

Come sono state calcolate le percentuali riportate in ➡ fig. 6?

Ricordiamo (➡ *La matematica e i suoi modelli*, scheda 2) che il legame tra due grandezze proporzionali è rappresentato graficamente da una retta passante per il punto (0,0): un punto che si muova sulla retta conserva inalterato il rapporto tra coordinata verticale e coordinata orizzontale. Da ciò segue la possibilità di calcolare le percentuali con un ***metodo grafico***.

Vediamo in dettaglio il procedimento da impiegare e, a destra, la sua esemplificazione riferita a figura 7: come si trova la percentuale dei consumi alimentari nel 1985, cioè il rapporto tra il *dato* 116 e il *totale* 434.

– *scegliamo opportune "scale" in modo da rappresentare facilmente sull'asse orizzontale i dati e sull'asse verticale le relative percentuali;*

– per ottenere numerazioni degli assi facilmente leggibili con un quadretto grande abbiamo rappresentato in orizzontale 50 e in verticale 10;

– *tracciamo la retta che unisce (0,0) e (*totale*,100);*

– abbiamo unito (0,0) e (434,100);

– *per ogni* dato *individuiamo il punto di questa retta che ha come ascissa* dato*;*

– abbiamo proceduto verticalmente partendo dalla posizione sull'asse orizzontale che rappresenta 116, fino a intercettare il grafico;

– *l'ordinata di questo punto è la* percentuale *cercata.*

– abbiamo proseguito orizzontalmente incontrando l'asse verticale nella posizione che corrisponde circa alla tacca 27 (è la tacca più vicina).

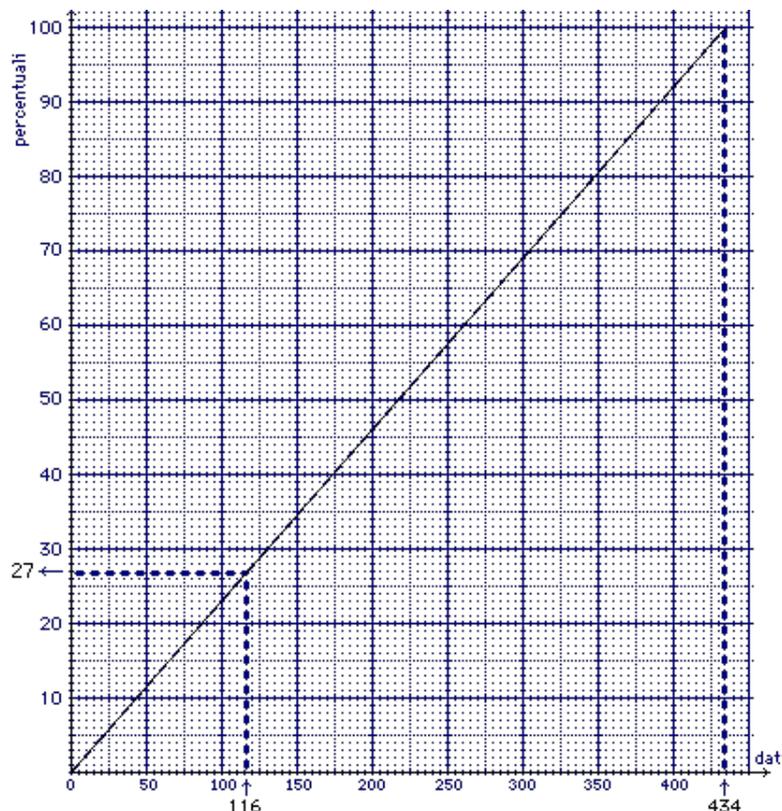



figura 7

24 Procedi analogamente per trovare la percentuale costituita dai consumi riportati sotto la voce "altro" (168.7… migliaia di miliardi). ....%

Come possiamo procedere con un ***metodo numerico***? In due modi:

– esprimere in forma percentuale il rapporto tra il dato e il totale:

$$(\mathbf{3.1}) \qquad percentuale = \frac{dato}{totale} \cdot 100$$

oppure

– moltiplicare il dato per il fattore di proporzionalità (rapporto tra nuovi valori e valori originali):

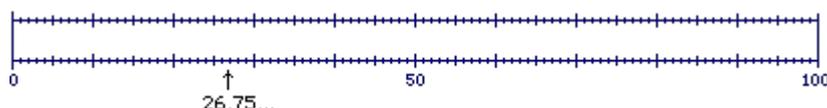
$$(\mathbf{3.2}) \qquad percentuale = dato \cdot \frac{100}{totale}$$

È evidente che (3.1) e (3.2) sono equivalenti: moltiplicando per 100 prima della divisione per *totale* o dopo di essa si ottiene comunque lo stesso numero.

25 Utilizzando (3.1) o (3.2) calcola la percentuale delle spese per alimentari (116148 miliardi) rispetto al totale dei consumi (434100 miliardi) nell'85 e riportala così come è visualizzata dalla CT. Scrivi anche quali valori hai *sostituito* alle *variabili* presenti nella formula.
dato ← .... *totale* ← .... *percentuale* visualizzata dalla CT: ....

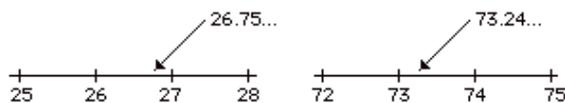
Si può procedere analogamente per trovare la percentuale dei consumi non alimentari. Si ha dunque:

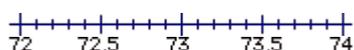
percentuale costituita dai consumi alimentari: 26.756047
percentuale costituita dai consumi non alimentari: 73.243953

Se ci interessa rappresentare i dati su diagrammi a striscia come quelli di fig. 6 dobbiamo trovare la lunghezza in quadrettini delle varie parti in cui suddividere la striscia. Nel caso di 26.756047 dobbiamo decidere se prendere 26 o 27 quadrettini, cioè se ***approssimare*** la percentuale con il numero intero 26 oppure con il numero intero 27.

Possiamo scegliere tra una approssimazione:

– per ***troncamento***, cioè togliere tutte le cifre successive al posto degli interi (ossia tutte le cifre dopo il punto decimale), ottenendo 26, o:

– ***al numero più vicino***, cioè prendere l'intero più vicino a 26.756…, ottenendo 27; questo secondo procedimento viene di solito chiamato ***arrotondamento***.

Se tra le tacche di separazione tra quadrettini si prende (come fatto procedendo graficamente) quella più vicina al punto che rappresenta il dato esattamente si deve procedere per *arrotondamento*, e prendere 27. Si procede analogamente per 73.243…; si ottiene 73, ma in questo caso si otterrebbe lo stesso valore per troncamento.

Nota. Molti impiegano la parola arrotondamento per indicare una qualunque approssimazione con un numero inferiore di cifre; noi nel seguito useremo in genere la parola "arrotondamento" nel significato di "approssimazione al numero più vicino".

26 In quali casi troncando e arrotondando alle unità si ottiene lo stesso numero intero? Completa la tabella seguente. Quindi evidenzia sul disegno sottostante l'intervallo dei numeri che vengono arrotondati a 73 ed evidenzia diversamente quello dei numeri che vengono troncati. L'intersezione tra i due intervalli è l'intervallo dei numeri cercati.

numero	arrotondamento	troncamento
72.03		
72.41		
72.53		
72.64		
72.72		
72.91		
73.09		
73.41		
73.56		

Una *regola per eseguire gli arrotondamenti alle unità* è dunque la seguente:

– se la cifra di posto inferiore a quello delle unità (cioè se la cifra dei decimi) è
0, 1, 2 ,3 o 4 si prende il numero troncato alle unità,
– se è 5, 6, 7, 8 o 9 si prende il numero troncato alle unità e aumentato di uno

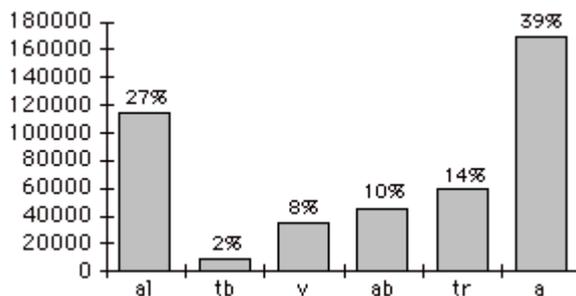
27 Completa la colonna centrale della seguente tabella usando una tra le formule (3.1) e (3.2) e arrotondando le percentuali agli interi. Completa la colonna destra senza usarla; come hai proceduto?

anno	% alim.	% non alim.
1926		
1945		
1965		
1985		
2008		

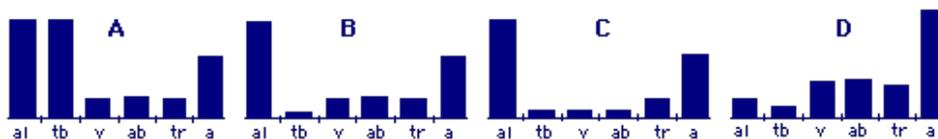
....
....
....

28 Sapreste spiegare perché nel 1945 i consumi alimentari rappresentavano una parte così rilevante del totale?

Analogamente a come abbiamo fatto per i consumi alimentari e non, possiamo rappresentare mediante istogramma le varie voci di consumo presenti nella tabella ➜ (1.1).

Ecco a fianco la rappresentazione relativa al 1985.

29 Individua quale, tra i seguenti istogrammi, rappresenta i consumi nel 1965. Non essendo stati riportati i valori numerici devi trovare la soluzione procedendo per esclusione.

Motiva la tua risposta (l'istogramma … *non va bene perché* … ; l'istogramma … ; …).

....
....
....
....
....

Nella *figura 8* sottostante sono rappresentati mediante istogrammi i vari tipi di consumi negli anni 1926, 1945, 1965, 1985 e 2008. E` indicata anche l'incidenza percentuale di ciascuna voce di consumo. Controlliamo le percentuali relative al 1926.

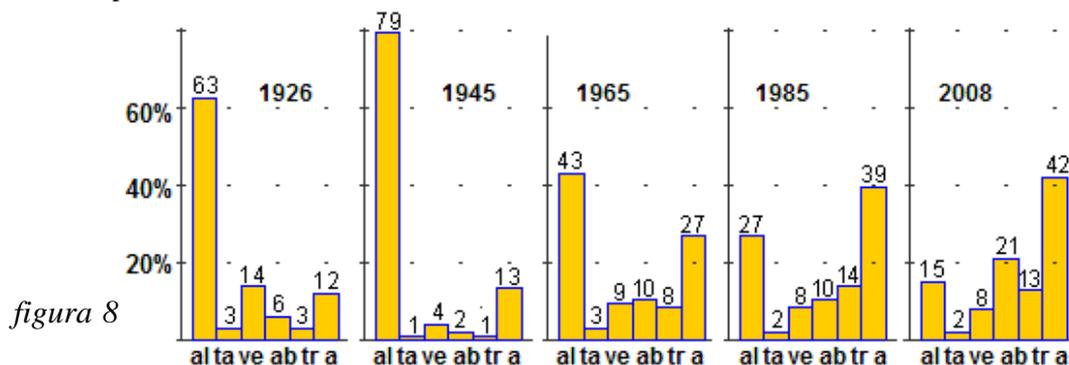



figura 8

Per fare il calcolo con la CT possiamo usare una tra le due formule → (3.1) e (3.2):
– *totale* è 124205,
– *dato* assume man mano i valori: 77749, 3226, 17659, 6849, 3420, 15302.

Per evitare di battere 6 volte il valore di *totale* (il che, oltre a portar via tempo, fa aumentare la probabilità di premere dei tasti sbagliati e scrivere un numero diverso da 124205) possiamo impiegare la ***memoria*** della CT.

Qui ci riferiremo a CT simili a quelle della → figura 1. In fondo alla scheda abbiamo riportato i tasti per l'uso della memoria di cui dispongono le più diffuse CT. Rinviamo alle indicazioni → ivi contenute chi disponga di una CT di tipo differente.

Usando → (3.1) posso ricopiare *totale* nella memoria *M* della CT (*M* ← *totale*) battendo:

124205 [M+] con la CT di sinistra	o	124205 [STO] con la CT di destra

(nel caso della CT di sinistra, se in *M* è già registrato un dato, occorre prima pulire la memoria con [CM])

e poi battere:

77749 [÷] [MR] [×] 100 [=]		77749 [÷] [RCL] [×] 100 [=]
3226 [÷] [MR] [×] 100 [=]	oppure	3226 [÷] [RCL] [×] 100 [=]
17659 [÷] [MR] [×] 100 [=]		17659 [÷] [RCL] [×] 100 [=]

Per evitare di battere [×] 100 posso limitarmi a calcolare con la CT i rapporti *dato/totale*, cioè battere solo: 77749 [÷] [MR] [=], 3226 [÷] [MR] [=], … (o: 77749 [÷] [RCL] [=], …) e mentalmente trasformare il risultato in forma percentuale (e arrotondarlo a valori percentuali interi).

30

	sul visore	forma percent.	arrotond.
77749 / *M*	0.62597319	62.59…%	63%
3226 / *M*	0.025973189	2.59…%	3%
17659 / *M*	0.14217624	14.21…%	14%
6849 / *M*	0.055142708		
3420 / *M*			
15302 / *M*			

Completa la tabella a fianco usando la CT per calcolare i rapporti e il calcolo mentale per le ultime due colonne.
Controlla se hai ottenuto le stesse percentuali riportate nella → figura 8.

31 Usando la formula → (3.2) si può procedere diversamente. Si può mettere in *M* il risultato di 100/*totale* (cioè il fattore di proporzionalità) e ogni volta calcolare *dato*·*M*. Descrivete la sequenza di tasti che dovete premere per effettuare questo calcolo e, su qualche dato, verificate la correttezza dei risultati che si ottengono in questo modo.

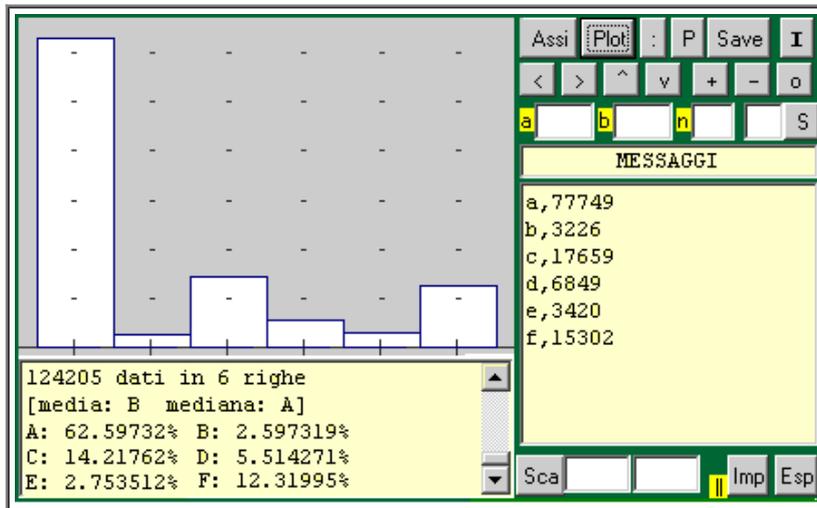
………

32 Dal confronto degli istogrammi di → figura 8 è possibile notare come sia cambiata, dal 1926 al 1985, l'incidenza di ciascuna voce sul totale. Individuate per quali voci tale incidenza è aumentata, per quali è diminuita, per quali questi cambiamenti sono stati maggiori, …. Quali osservazioni potete fare, di conseguenza, sui cambiamenti nelle condizioni di vita? Quali consumi pensate siano compresi sotto la voce "*altro*"?

Abbiamo visto come utilizzare una CT per realizzare elaborazioni statistiche: l'utente, individuato il procedimento da impiegare, fa eseguire i singoli calcoli alla macchina. Con un computer si possono realizzare le stesse elaborazioni limitandosi a introdurre i dati, senza specificare man mano le operazioni aritmetiche da eseguire: basta che il procedimento di calcolo sia stato "memorizzato" sotto forma di *programma*.

Vediamo ad esempio l'uso del programma **Stat** per studiare come nel 1926 i consumi degli italiani si ripartivano nelle varie voci (vedi tabella seguente).

voci di spesa	alimentari	tabacco	vestiario	abitazione	trasporti	altro
milioni di lire	77749	3226	17659	6849	3420	15302

L'utente, per ciascuna voce, batte una lettera seguita dal dato corrispondente. Poi clicca [I] per introdurre i dati (farli "leggere" dal computer). In un'altra finestra compare la distribuzione percentuale. Cliccando [Plot] compare, in un'ulteriore finestra, il relativo istogramma:

33 Prova a usare Stat per calcolare le percentuali e fare gli istogrammi relativi alla ➔ tabella (1.1) e confronta con ➔ figura 8 quanto ottieni.

34 Nel 1989 in Italia un abitante ha consumato mediamente 26.3 kg di carne bovina, 26.5 kg di carne suina, 30.3 kg di carne di altro tipo (pollo, agnello, pesce,…); nel 1969 gli stessi consumi sono stati, rispettivamente, di 23.5, 9.3 e 17.5 kg. Per entrambi gli anni, calcola (aiutandoti con la CT) la distribuzione percentuale del consumo di carne e (utilizzando un foglio di carta millimetrata) tracciane l'istogramma. Rifai le stesse elaborazioni statistiche usando il programma Stat e confronta quanto hai ottenuto nei due modi.

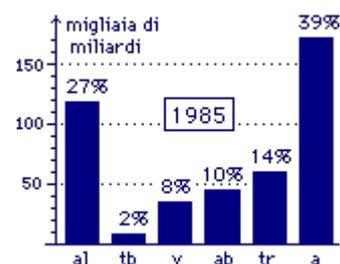
35 Calcola la somma delle percentuali riportate nell'ultima colonna della tabella del ➔ quesito 30. Fa 100%? Trovate una spiegazione per questa "stranezza" del risultato e scrivetela in forma sintetica qua sotto.

....

....

4. *Diagrammi a settori circolari, altri diagrammi*

Qui sotto abbiamo riprodotto parzialmente la ➔ tabella (1.1) sui consumi degli italiani e l'istogramma relativo al 1985. Abbiamo già osservato che mediante gli istogrammi si possono fare rapidamente delle valutazioni *a occhio*: riferendoci al 1985, possiamo osservare che la spesa per i consumi alimentari e quella per la voce "altro" hanno maggiore incidenza delle altre voci, che le spese per vestiario, abitazione e trasporti hanno un peso simile, … ; non siamo, però, in grado di valutare dal disegno quale incidenza abbia ciascuna categoria di consumi rispetto al totale (per ovviare a ciò sopra alle colonne si possono scrivere le percentuali, come abbiamo fatto nel caso raffigurato).

anno	aliment.	tabacco	vestiti	abitaz.	trasporti	altro	*totale*
			in miliardi di lire				
1985	116 148	9 306	35 756	45 238	58 919	168 733	*434 100*
			in milioni di euro				
2008	137 460	17 587	71 380	198 404	120 769	392 331	*937 931*

La rappresentazione a striscia facilita il confronto visivo tra una voce e il totale:

ma risulta più difficile il confronto tra le varie voci. Ad esempio si ha immediatamente un'idea dell'incidenza della voce "vestiario" ma (rispetto all'istogramma) risulta meno evidente che è inferiore a quella della voce "abitazione".

Un buon confronto visivo sia tra le varie voci che tra ogni voce e il totale è offerto da un ulteriore tipo di rappresentazione: il ***diagramma a settori circolari***.

Il totale viene rappresentato con un cerchio che è suddiviso in settori circolari in modo che le loro ampiezze siano proporzionali ai dati. Ad esempio, se consideriamo i consumi del 1985, suddivisi soltanto in alimentari e non alimentari, otteniamo il diagramma a fianco.

Come è stato ottenuto?

Il procedimento è del tutto analogo a quello impiegato per le percentuali. Per esse si è visto che si può:

- calcolare per ogni *dato* quanta parte è del *totale*, cioè il rapporto *dato*/*totale*, [nel nostro caso 116148/434100=0.267…, cioè i consumi alimentari sono 0.267… volte il totale dei consumi] e prendere la stessa porzione di 100 [0.267… volte 100, cioè 0.267…·100=26.7… arrotondabile a 27]:

(3.1) $$percentuale = \frac{dato}{totale} \cdot 100$$ oppure:

- moltiplicare ogni *dato* per lo stesso fattore moltiplicativo che trasforma il *totale* in 100, ossia per il rapporto 100/*totale*:

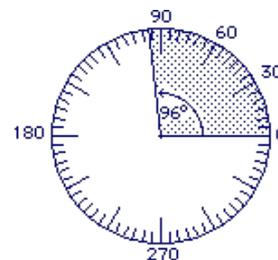
(3.2) $$percentuale = dato \cdot \frac{100}{totale}$$

Abbiamo anche osservato che è facile verificare l'equivalenza di (3.1) e di (3.2): moltiplicando per 100 prima della divisione per *totale* o dopo di essa si ottiene comunque lo stesso numero.

Nel caso dei diagrammi a settori circolari il totale viene rappresentato dall'intero cerchio, cioè da 360°. L'*ampiezza* in gradi da associare a un particolare *dato* può quindi essere calcolata usando le formule che si ottengono da (3.1) e (3.2) mettendo 360 al posto di 100. *Scrivi* queste formule:

(**4.1**) *ampiezza* = (**4.2**) *ampiezza* =

36 L'incidenza della voce "alimentari" nell'85 è stata rappresentata con un angolo di 96°. Impiegando la CT e usando (4.1) o (4.2) verifica la correttezza di questa scelta. Scrivi, qui sotto, l'ampiezza così come appare sul visore della CT e il suo arrotondamento agli interi.

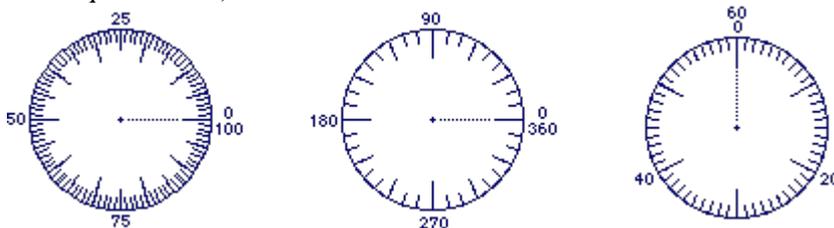
ampiezza (sul visore) = ...
ampiezza (arrotondata) = ...

37 Marco dice: «invece di calcolare 116148·360/434100 o 116148/434100·360 sfrutto il fatto che i consumi alimentari sono il 27% del totale e per trovare la porzione di cerchio calcolo il 27% di 360°: 27/100·360». In questo modo ottiene 97.2 e quindi rappresenta i consumi alimentari con un settore ampio 97°. Come mai Marco ottiene un valore diverso dal nostro?

....

....

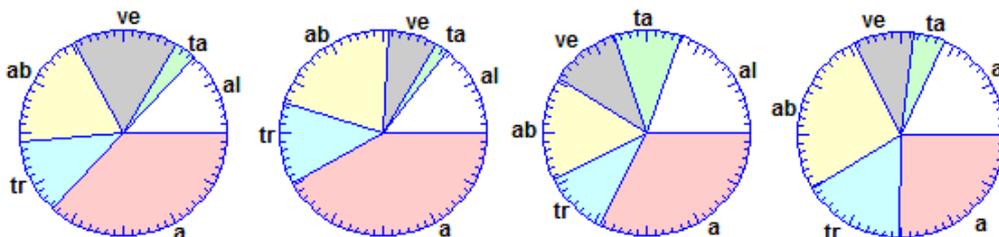
38 Per confrontare 4 con 20 posso impiegare il rapporto 4/20, lasciandolo indicato così o calcolando il risultato della divisione: 4/20 = 0.2 = 20%. Posso anche dire che:

– 4 sta … volte nel 20
– 20 è 5 volte 4
– 4 sta a 20 come 1 sta a 5
– il rapporto tra 4 e 20 è uguale al rapporto tra 1 e …
– 20 sta a 4 come … sta a 1
– il rapporto tra … e … è 1 a 5
– … è 1/5 di …
– 4 è … volte 20

Completa le frasi precedenti e, facendo corrispondere a 20 l'intero cerchio, *traccia* il settore corrispondente a 4 nelle seguenti figure (un raggio è già tracciato; utilizza la numerazione indicata e tieni conto che 4 è un quinto di 20).

39 Individua quale, tra i seguenti diagrammi, rappresenta i consumi nel 2008. Usa la ➔ tabella (1.1), riprodotta anche all'inizio del paragrafo, per capire quali diagrammi scartare e motiva la risposta (il diagramma … *non va bene perché* … ; …).

....

....

....

Vediamo come effettuare il calcolo quando si devono rappresentare più di due parti, ad esempio per ottenere diagrammi come quelli del quesito precedente. Sembra più conveniente l'uso di ➔ (4.2): si calcola il fattore di proporzionalità k (=360/*totale*) una volta per tutte, lo si memorizza e poi si calcola ripetutamente *dato*·k. Ecco che cosa si batterebbe con tre particolari CT (la colonna a destra si riferisce a un particolare calcolatore tascabile programmabile):

360 [÷] 434100 [=] [M+]	360 [÷] 434100 [=] [STO]	[K] [=] 360 [/] 434100 [EXE]
116148 [×] [MR] [=]	116148 [×] [RCL] [=]	116148 [*] [K] [EXE]
9306 [×] [MR] [=]	9306 [×] [RCL] [=]	9306 [*] [K] [EXE]

40 Con questo procedimento, i 5 dati della tabella seguente verrebbero rappresentati dalle ampiezze angolari sotto indicate, di cui riportiamo anche gli arrotondamenti alle unità di grado:

	dato1	dato2	dato3	dato4	dato5	totale
valori originali	21902	34506	9702	5704	186	72000
ampiezze angolari	109.51°	172.53°	48.51°	28.52°	0.93°	360°
ampiezze arrotondate	110°	173°	49°	29°	1°	360°

Prova a rappresentare questi dati completando il diagramma a settori seguente. Incontri delle difficoltà?

Il problema a cui ti trovi di fronte è analogo a quello che ti si è presentato affrontando un quesito del paragrafo 3. Quale?

....

Per evitare situazioni come quella del quesito precedente ci conviene trovare direttamente la posizione in cui tracciare i raggi che separano i settori invece che trovarla man mano come somma dei valori arrotondati delle singole ampiezze.

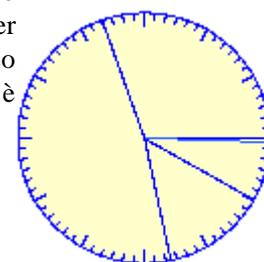
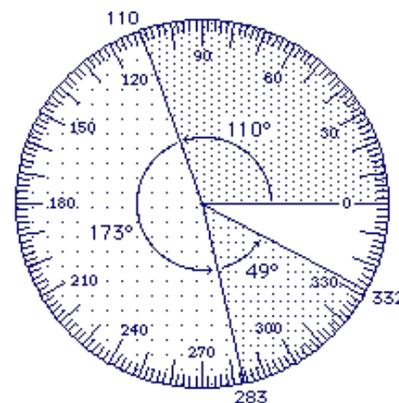
Dopo avere tracciato il raggio iniziale che passa per la posizione 0°, la posizione del primo raggio di separazione può essere trovata usando direttamente (4.2) mettendo il valore del primo dato (*dato1*) al posto di *dato* e poi arrotondando il risultato; la posizione dei successivi raggi può essere calcolata prendendo come *dato* man mano *dato1*+*dato2*, *dato1*+ *dato2*+*dato3*, … e arrotondando i risultati.

È in questo modo che procedono il programma **Stat** e programmi simili; a fianco è riprodotto il diagramma che viene visualizzato nel caso del quesito precedente (per ottenere il diagramma a settori occorre cliccare due volte [Plot]). Vediamo per esteso il calcolo delle ampiezze angolari seguendo questo nuovo procedimento (k è 360/72000):

$$21902 \cdot k = 109.5\ldots \to 110$$

$$(21912+34522) \cdot k = 282.2\ldots \to 282 \quad \text{(invece di 283)}$$

$$(21912+34522+9720) \cdot k = 330.5\ldots \to 331 \quad \text{(invece di 332)}$$

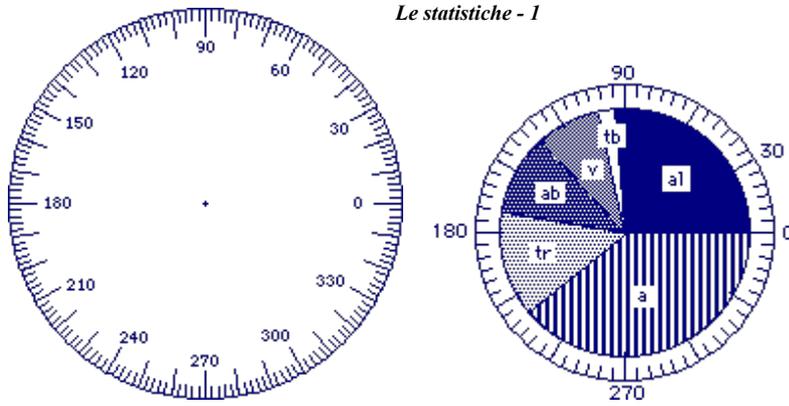
$$(21912+34522+9720+5704) \cdot k = 359.0\ldots \to 359 \quad \text{(invece di 361)}$$

Proviamo a tracciare il diagramma a settori relativo ai ➨ consumi nel 1985. Dovremo calcolare (con k = 360/434100):

$$\begin{aligned} al \cdot k &= 96.32\ldots \to 96 \\ (al + tb) \cdot k &= \qquad \to \\ (al + tb + v) \cdot k &= \qquad \to \\ (al + tb + v + ab) \cdot k &= \qquad \to \\ (al + tb + v + ab + tr) \cdot k &= \qquad \to \end{aligned} \qquad \textbf{(4.3)}$$

Invece di mettere in memoria k, possiamo ricorrere al tasto [M+] (o [SUM]), che consente di sommare il numero che appare sul visore a quello che è in M:

– calcoliamo una volta per tutte il valore di k ($8.293 \cdot 10^{-4}$) e lo annotiamo,
– usiamo [M+] per non ribattere addendi (al, tb, …) già sommati in precedenza,
– usiamo [MR] (o [RCL]) per richiamare man mano la "somma parziale",

cioè battiamo la sequenza riportata sotto a sinistra (a destra è riportata la sequenza impiegabile con alcuni calcolatori tascabili programmabili):

41 Procedi nel modo indicato (al primo uso di [M+] o [SUM] ricordati di liberare la memoria da eventuali dati registrati in precedenza), riporta i risultati dei calcoli e degli arrotondamenti completando lo schema (4.3) e, infine, traccia il diagramma usando l'apposito cerchio graduato riportato sotto; verifica se ottieni una rappresentazione simile a quella raffigurata sulla destra.

42 In ciascuna delle rappresentazioni grafiche considerate per rappresentare i valori numerici della tabella iniziale abbiamo calcolato la misura di una grandezza geometrica. Individuala e completa il seguente schema.

istogramma *lunghezza*
diagramma a striscia ....
diagramma a settori circolari ....

A volte questi diagrammi vengono anche chiamati ***areogrammi*** in quanto i dati non vengono rappresentati solo con segmenti aventi lunghezze ad essi proporzionali o con angoli aventi ampiezze ad essi proporzionali, ma con delle figure di area proporzionale:

– nel caso degli istogrammi abbiamo tracciato dei rettangoli di ugual base aventi per altezza le *lunghezze* ottenute,

– nel caso dei diagrammi a striscia abbiamo tracciato dei rettangoli di ugual altezza e aventi per base le *lunghezze* ottenute,

e i rettangoli in cui una dimensione è stata fissata hanno *area* che varia proporzionalmente all'altra dimensione,

– nel caso dei diagrammi a settori circolari abbiamo tracciato dei settori di egual raggio e formanti angoli delle *ampiezze* ottenute,

e i settori circolari di raggio fissato hanno *area* che varia proporzionalmente all'ampiezza dell'angolo.

Si possono realizzare istogrammi e diagrammi a settori circolari anche rappresentando i dati con delle figure solide aventi volumi proporzionali ai dati. In *figura 9* sono contenute diverse rappresentazioni degli stessi dati:

– tre istogrammi in cui i dati sono stati raffigurati con rettangoli di ugual base, con segmenti o con parallelepipedi di ugual base;

– due diagrammi a settori in cui i dati sono stati raffigurati con settori di uno stesso cerchio o con "spicchi" di uno stesso cilindro.

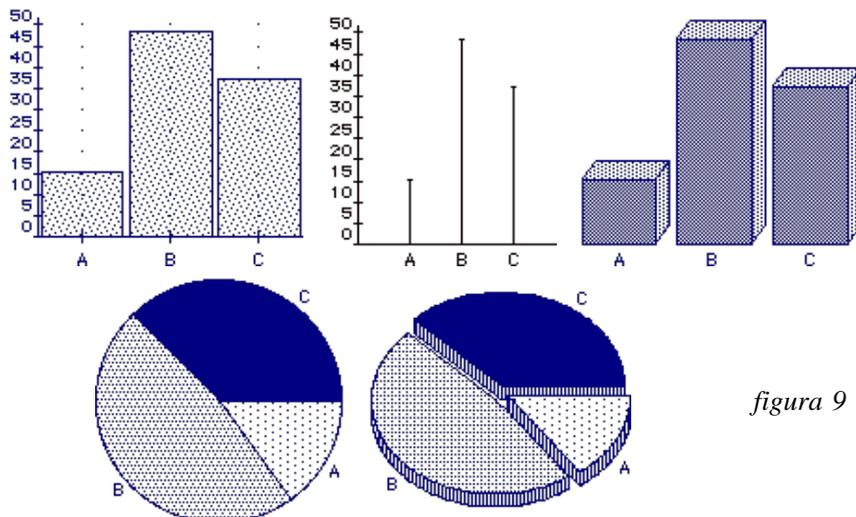



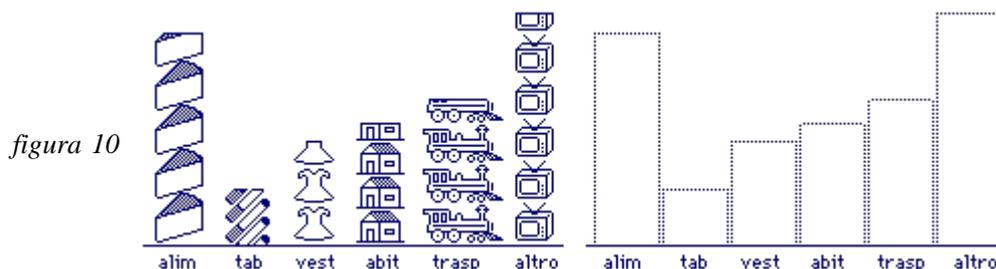
figura 9

Le rappresentazioni dei dati con figure geometriche solide a volte vengono chiamate ***stereogrammi***.

I nomi che abbiamo impiegato sono derivati dalla lingua greca: *gramma* significa *disegno*, *istós* significa *telaio* ("istogramma" indica quindi una rappresentazione grafica a forma di telaio: i dati vengono rappresentati con delle figure disposte lungo righe parallele, così come accade per i fili nel telaio), *stereós* significa *solido*.

A volte si usano anche altri nomi. Ad esempio i diagrammi a settori circolari vengono chiamati anche *diagrammi a torta*, gli istogrammi a volte vengono chiamati *diagrammi a barre* (quando si usano segmenti) o *diagrammi a colonne* o *a canne d'organo* (quando si usano rettangoli di egual base).

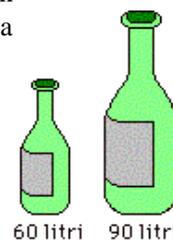
Vi sono poi gli ***ideogrammi***, cioè diagrammi in cui i dati sono rappresentati mediante figure simboliche in quantità o dimensione che varia in proporzione ai dati. Spesso (vedi *figura 10*) non sono altro che degli istogrammi dall'aspetto un po' più frivolo.

figura 10

Nei giornali e alla televisione alcuni tipi di ideogrammi sono spesso usati in maniera errata.

43 Un giornale per visualizzare il confronto tra la quantità di vino che in un anno beve in media un abitante del paese A e quella che beve in media un abitante del paese B usa l'ideogramma a fianco. Discutete la correttezza di questa rappresentazione.

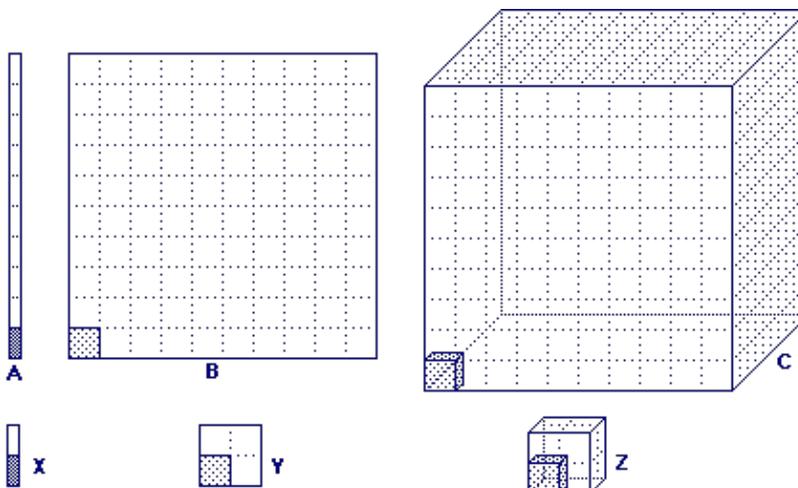
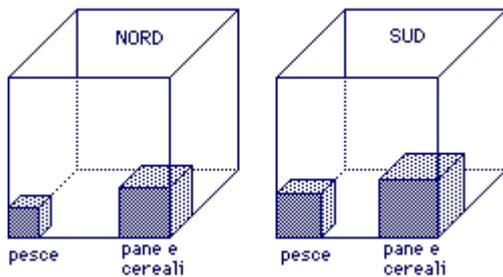
....

....

60 litri 90 litri

Se si ingrandisce una figura con il fattore di scala k il suo volume cresce maggiormente, di un fattore pari a k^3.

44 Completa la tabella seguente indicando per ciascuna delle figure il rapporto tra l'intera figura e la parte evidenziata (C e Z sono cubi).

EstensioneInteraFigura / EstensioneParteEvidenziata

A	**B**	**C**
X	**Y**	**Z**

Gli *stereogrammi* consentono il confronto di dati con ordini di grandezza molto diversi.

A fianco sono riportati due diagrammi in cui i dati vengono rappresentati con dei cubi. Il cubo "trasparente" rappresenta il totale (100%) dei consumi nel 1985, i cubi al suo interno rappresentano l'incidenza di alcune voci di spesa. Nel caso della spesa per pesce nell'Italia settentrionale l'incidenza è dello 0.6%; su un istogramma non avremmo potuto rappresentarla efficacemente.

5. I valori medi

I dati riportati nella tabella iniziale sono dati collettivi, indicano cioè il consumo complessivo della popolazione italiana. Dividendo il consumo complessivo per il numero degli abitanti si trova il ***consumo medio per abitante*** o ***consumo pro-capite***. Se indichiamo con N la quantità degli abitanti e con c_1, c_2, … c_N i consumi di ciascuno degli N abitanti, possiamo scrivere:

$$\textit{consumo pro-capite} = \frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_N}{N}$$

Più in generale si chiama ***media*** di più numeri il rapporto tra la loro somma e la loro quantità:

$$\textbf{(5.1)} \qquad \textit{media} = \frac{numero_1 + numero_2 + \ldots + numero_N}{N}$$

A volte si usa l'espressione più estesa ***media aritmetica*** per distinguere questo valore da altri tipi di valori medi, di cui discuteremo più avanti.

Il consumo pro-capite è dunque la media aritmetica dei consumi effettuati da tutti gli abitanti. I consumi complessivi indicati nella tabella sono stati ottenuti servendosi dei dati relativi alla vendita dei vari tipi di beni e di servizi, non sommando i consumi abitante per abitante: dai dati sulle vendite si riesce a ottenere quanto ha speso il complesso degli italiani, cioè il valore di $c_1+c_2+\ldots+c_N$, non i valori di c_1, c_2, …, c_N.

45 Di quale informazione (ulteriore, rispetto a quelle fornite finora nella scheda) hai bisogno per calcolare il consumo pro-capite per l'abbigliamento nel 2008?

....

46 Sapendo che la popolazione presente in Italia nel 2008 era di 59.6 milioni, calcola il consumo pro-capite per l'abbigliamento ed esprimilo (opportunamente arrotondato) in euro.

....

È *come se* ogni persona avesse speso .... € per vestirsi nel 2008, anche se la spesa per l'abbigliamento è un fenomeno che non si manifesta *in maniera uniforme nella popolazione*, ma c'è ovviamente chi spende di più e chi meno.

Analogamente, se impieghiamo 2 ore per percorrere in auto una distanza di 170 km diciamo di aver tenuto una *media* di, o che siamo andati ad una *velocità media* di, 85 km/h; anche in questo caso, tuttavia, il movimento della macchina *non è uniforme nel tempo* del viaggio.

Velocità media e consumo pro-capite sono esempi di ***valori medi***, cioè di particolari modelli matematici impiegati per sintetizzare attraverso un unico numero il comportamento di un certo fenomeno.

La velocità media non è tuttavia un esempio di media aritmetica, cioè non è esprimibile nella forma ➔ (5.1). [per approfondimenti: ➔ ques. 56]

Anche se il consumo pro-capite è, come abbiamo detto, un dato fittizio, è sovente utile. Vediamo perché risolvendo gli esercizi seguenti.

47 Il consumo totale di caffè in Italia è stato, nel 1881 e nel 1981, rispettivamente di 140 e 2277 migliaia di quintali. Puoi dire che un italiano nel 1981 beveva 2277/140 = 16 volte (circa) la quantità di caffè che beveva un italiano cent'anni prima? Perché?

....

48 Controlla la tua risposta completando la seguente tabella relativa al consumo di caffè,

	popolazione ital. (migliaia)	consumo totale (quintali)	cons. pro-capite (g/ab.)
1881	29 791	$140 \cdot 10^3$	
1981	56 557	$2\,277 \cdot 10^3$	

arrotondando il risultato ai grammi (ossia esprimendo il risultato in grammi e arrotondandolo poi alle unità). Indica il procedimento seguito per eseguire i calcoli.

....

49 Il consumo totale di zucchero nel 1986 del Portogallo e dell'Irlanda è stato, rispettivamente, di 275 616 e 145 181 tonnellate. Puoi dire che in Portogallo si mangiava più "dolce" che in Irlanda? Perché?

....

Il consumo pro-capite è sovente preferibile perché, essendo indipendente dalla numerosità della popolazione, è *più facilmente confrontabile* con consumi relativi ad altri tempi (quesiti 47 e 48) o ad altre zone geografiche (quesito 49).

50 Sapendo che la popolazione presente in Italia nel 2008 era di 59.6 milioni, trova il consumo pro-capite totale e quello per ciascun gruppo di beni, arrotondando il risultato alle migliaia e usando il tasto-memoria della CT. Quale dato hai messo in memoria? ....

aliment.	tabacco	vestiti	abitaz.	trasporti	altro	*totale*

51 Esprimi la relazione tra *consumo complessivo*, *consumo pro-capite* e *numero di abitanti* completando le formule:

(**5.2**) *consumo pro-capite* =

(**5.3**) *consumo complessivo* =

(**5.4**) *numero di abitanti* =

La seguente tabella (5.5), che contiene i *consumi medi mensili per famiglia* relativi all'anno 2007, ci mostra che il consumo calcolato per tutto il paese è diverso da quello di ciascuna delle due zone geografiche: settentrionale e centrale, meridionale e insulare (zone che indicheremo con SC, MI). Ad esempio, in MI una famiglia per i trasporti mediamente spende molto meno che in SC; il dato relativo a tutta l'Italia è compreso tra quello delle due zone. Ciò conferma l'osservazione che abbiamo fatto circa la natura "fittizia" dei valori medi.

(**5.5**)

	aliment.	tabacco	vestiario	abitaz.	trasporti	altro	totale
SC	459.57	20.22	157.70	764.11	415.67	1320.53	2722.13
MI	480.49	24.10	153.00	450.88	260.09	600.70	1969.26
Italia	466.29	21.47	156.19	663.39	365.65	807.08	2480.07

52 Dalle prime voci della tabella sembra che la spesa familiare mensile in Italia sia pari alla *media aritmetica* di quelle nelle due zone SC e MI. Ma le ultime colonne successive fanno emergere qualche dubbio. Controlla numericamente tale ipotesi su questa voce.

$$\frac{\textit{spesa per trasporti in SC} + \textit{spesa per trasporti in MI}}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Quale sarebbe stato il modo corretto per ottenere il consumo medio per famiglia in Italia a partire da quelli di SC e MI? Avremmo dovuto ricordare il significato di consumo medio, cioè usare (5.2), mettendo

consumo per famiglia e *numero di famiglie* al posto di
consumo pro-capite e di *numero di abitanti*

Proviamo a farlo.

Usando i dati della seguente tabella **A** e la relazione (5.3) possiamo completare le prime due righe dell'ultima colonna (riquadri con "?"). Con una semplice somma possiamo completare anche la colonna centrale (altro riquadro con "?"). Sotto è riportato il nuovo aspetto **B** della tabella. Non sono stati ancora completati i calcoli. Si noti che i calcoli sono stati impostati in modo da non portarsi dietro tutti gli zero.

Possiamo quindi passare a **C**, in cui abbiamo tenuto presente che per sommare le prime due righe dell'ultima colonna possiamo procedere senza tener conto dei 2 zero finali e poi aggiungerli alla fine.

A

	consumo per famiglia in trasporti	numero di famiglie	consumo complessivo in trasporti
SC	415.67	16 200 000	**?**
MI	260.09	7 680 000	**?**
Italia	**???**	**?**	**??**

↓

B

	consumo per famiglia in trasporti	numero di famiglie	consumo complessivo in trasporti
SC	415.67	16 200 000	41567 · 162 · 1000
MI	260.09	7 680 000	26009 · 768 · 100
Italia	**???**	23 880 000	**??**

↓

C

	consumo per famiglia in trasporti	numero di famiglie	consumo complessivo in trasporti
SC	415.67	16 200 000	41567 · 162 · 1000
MI	260.09	7 680 000	26009 · 768 · 100
Italia	**???**	23 880 000	(41567·1620+26009·768)·100

53 Usando → (5.2) calcola il valore ??? (consumo medio per famiglia in trasporti relativo all'Italia), arrotondalo a 3 cifre (perché) e confrontalo con quello contenuto in → (5.5).

consumo medio per famiglia in Italia = *consumo complessivo*/*numero di famiglie* =

$$= \frac{(\ldots\ldots\ldots \cdot \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots \cdot \ldots\ldots\ldots) \cdot 100}{2388 \cdot 10000} =$$

$$= \frac{\ldots\ldots\ldots \cdot \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots \cdot \ldots\ldots\ldots}{2388} / 100 =$$

= .... → [arrotondando a 3 cifre] ....

54 Scrivi la sequenza di tasti che conviene utilizzare per eseguire il calcolo precedente con la tua CT.

....

Abbiamo visto che la media aritmetica dei consumi per famiglia delle due zone geografiche non coincide con il consumo per famiglia italiano. Ciò dipende dal fatto che le spese per famiglia delle due zone influiscono diversamente sul consumo complessivo in quanto il numero delle famiglie, per cui vengono moltiplicate, è diverso nei due casi. Si dice che la spesa familiare di ciascuna zona ha un *peso* diverso sulla spesa familiare in Italia.

Dalla → tabella (5.5) si vede che la spesa media in Italia è più vicina alla spesa media in SC che a quella in MI. Infatti in SC sono presenti più famiglie che in MI, e quindi il valore relativo a SC "pesa" maggiormente, facendo avvicinare a sé il valore relativo all'intero paese. La situazione è analoga a quella raffigurata a fianco: il punto di equilibrio è più vicino all'oggetto che pesa maggiormente.

55 La famiglia Bianchi è composta da due bambini piccoli, dai loro due genitori e dai nonni paterni. In questa famiglia gli adulti consumano a testa mediamente 1/5 di litro (200 ml) di latte al giorno mentre i bambini ne consumano mediamente 1/2 litro (500 ml) a testa. Poiché (200+500)/2 = 350, è corretto affermare che il consumo medio giornaliero di latte di un membro della famiglia Bianchi è di 350 ml?

....

Si presenta una situazione analoga se confrontiamo le *velocità medie* su due tratti di strada con quella relativa all'intero percorso.

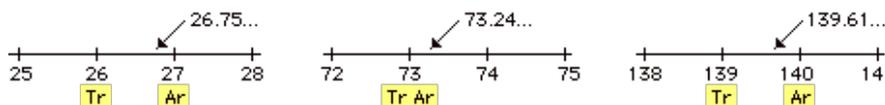
56 Il signor Rossi per raggiungere il posto di lavoro deve percorre 12 km per arrivare al casello autostradale più vicino e ulteriori 35 km di autostrada. In un dato giorno il signor Rossi andando a lavorare impiega 30 minuti per il tratto cittadino e 20 minuti per il tratto autostradale.

- Qual è la velocità media del signor Rossi in ciascuno dei due tratti?
  $v_{tratto1}$ = $v_{tratto2}$ =
- Qual è la velocità media del signor Rossi sul percorso complessivo? v =
- Confronta v con la media di $v_{tratto1}$ e $v_{tratto2}$. *media* di $v_{tratto1}$ e $v_{tratto2}$ =

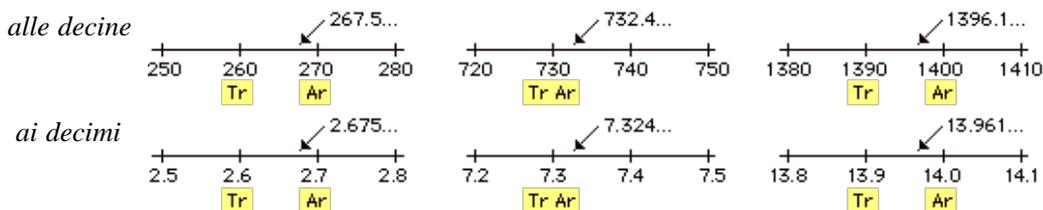
6. Cifre significative

Abbiamo visto che un numero può essere approssimato agli interi:

- per ***troncamento***, cioè togliendo tutte le cifre successive al posto delle unità, o:
- per ***arrotondamento***, cioè prendendo l'intero *più vicino*, e, più precisamente:
  – se la cifra a destra di quella delle unità (cioè se la cifra dei decimi) è
  0, 1, 2, 3 o 4 prendendo il numero troncato alle unità,
  – se è 5, 6, 7, 8 o 9 prendendo il numero troncato alle unità e aumentato di uno.

Sotto sono raffigurate due situazioni (la 1ª e la 3ª) in cui troncamento e arrotondamento sono diversi e una (la 2ª) in cui coincidono.

Per *troncare* 238 712 alle migliaia, poiché 238712 = 238.712 migliaia, trovato il troncamento agli interi di 238.712, cioè 238, possiamo prendere 238 mila, ossia 238 000. Per *arrotondarlo* alle migliaia, poiché l'arrotondamento agli interi di 238.712 è 239, prendiamo 239 mila, ossia 239 000.

In altre parole per troncare alle migliaia sostituiamo con 0 tutte le cifre a destra di quella delle migliaia; per arrotondare alle migliaia procediamo analogamente e poi aumentiamo di 1 migliaio il numero ottenuto <u>se</u> la prima cifra a destra di quella delle migliaia è maggiore o uguale a 5.

Qui sotto sono raffigurati alcuni arrotondamenti alle decine e ai decimi, realizzabili con ragionamenti simili: 13.961… ai decimi viene troncato con 13.900…, o 13.9; poiché la cifra a destra di quella dei decimi è 6, che non è minore di 5, per ottenere l'arrotondamento dobbiamo aggiungere 0.1 (1 decimo): 13.9 → 14.0.

57 Con ragionamenti simili esegui i seguenti *arrotondamenti*:

3456 alle decine .... 6825750 ai milioni ....
163 alle decine .... 0.3695 ai centesimi ....
84126500 ai milioni .... 2.471 ai centesimi ....

Consideriamo la seguente tabella, completata nell'es. e3, relativa alla retribuzione annua lorda di un pubblico dipendente di medio livello in diversi anni in cui vigeva la lira. Si sono aggiunti in fondo i dati non arrotondati presenti nelle statistiche ufficiali da cui provengono e le cifre a cui sono stati approssimati.

	1926	1945	1965	1985
forma esp.	$9.15 \cdot 10^3$ L	$7.34 \cdot 10^4$ L	$1.42 \cdot 10^6$ L	$1.71 \cdot 10^7$ L
ord. grand.	migliaia	decine di migliaia	milioni	decine di milioni
per esteso	9150	73400	1420000	17100000
non arrotondato	*9151*	*73360*	*1415937*	*17099865*
arrotondamento alle	decine	centinaia	decine di migliaia	centinaia di migliaia

Tutti i dati (come si vede bene nella loro scrittura in forma esponenziale) sono stati arrotondati alla terza cifra iniziale (cioè alla terza cifra contando verso destra a partire dalla prima cifra diversa da 0).
Nel caso di 17099865 L la terza cifra iniziale (cifra sottolineata) era quella delle centinaia di migliaia; la cifra alla sua destra era 9, 9 è maggiore di 4, quindi 0 è stato aumentato di 1 e si è ottenuto 171….
Nel caso di 9151 L la terza cifra iniziale era quella delle decine; alla sua destra c'era 1, 1 è minore di 5, quindi la cifra non è stata aumentata.

In tutti i casi si dice che i dati sono stati arrotondati a 3 ***cifre significative***.

Se 9151 fosse stato arrotondato a 1 cifra significativa, cioè alla 1a cifra iniziale, avremmo ottenuto 9000; se fosse stato arrotondato a 2 cifre significative, avremmo ottenuto 9200 (infatti la 3a cifra iniziale è 5).

58 Arrotonda a due cifre significative i seguenti numeri:

3456 .... 84126500 .... 0.3695 ....
163 .... 6825750 .... 2.471 ....

Più in generale, se X è un numero:

- per ***arrotondare*** X alla cifra di ***posto n***:
  - se la cifra immediatamente a destra è 0, 1, 2, 3 o 4 si sostituiscono con 0 tutte le cifre a destra del posto *n*
  - se è 5, 6, 7, 8 o 9 si aumenta di uno la cifra di posto *n* e si sostituiscono con 0 tutte le cifre alla sua destra
- per ***arrotondare*** X a ***n cifre significative*** si arrotonda alla *n*-esima cifra iniziale.

7. Esercizi

e1 Completa la seguente tabella, che ricorda il significato di alcuni prefissi impiegati per trasformare una unità di misura in un suo multiplo o un suo sottomultiplo.

moltiplicatore	*prefisso*	*espressione verbale*
0.000 000 000 001 = 1/1000 000 000 000 = 10^{-12}	p	pico
0.000 000 001 = 1/1000 000 000 = …	n	nano
0.000 001 = 1/ … = …	m	micro
0.001 = 1/ … = …	m	milli
1000 = 10^3	k	chilo
1000 000 = 10^6	M	mega
1000 000 000 = …	G	giga
1000 000 000 000 = …	T	tera

e2 E` maggiore un migliaio di miliardi o un miliardo di migliaia o un milione di milioni?

un migliaio di miliardi = $10^9 \cdot 10^3 = 10^{9+3} = 10^{12}$
un miliardo di migliaia = $10^3 \cdot 10^9$ = … = …
un milione di milioni = … = …

e3 I seguenti dati rappresentano la *retribuzione annua lorda* (in lire) di un dipendente pubblico di medio livello negli stessi anni considerati nella tabella (1.1); la retribuzione lorda è lo stipendio non gravato da imposte (nel caso di un dipendente di questo livello le imposte incidevano complessivamente per una percentuale che, nei vari anni, ha oscillato intorno al 15%). Completa le righe sottostanti.

forma esp.	1926: $9.15 \cdot 10^3$ L	1945: $7.34 \cdot 10^4$ L	1965: $1.42 \cdot 10^6$ L	1985: $1.71 \cdot 10^7$ L
ord. grand.	1926: migliaia	1945:	1965:	1985:
per esteso	1926: 9150	1945:	1965:	1985:

e4 Se con le forbici dimezzo un foglio di carta, poi sovrappongo le due parti ottenute e le taglio a metà, poi sovrappongo i foglietti così ottenuti e procedo con un nuovo taglio, alla fine ottengo 2·2·2 foglietti; infatti ad ogni taglio raddoppio il numero dei foglietti. Quanti foglietti otterrei con 6 tagli? E con *n* (*n* numero intero positivo qualunque)? Impiegando il tasto [x^y] della CT calcola quanti foglietti si otterrebbero (impiegando una taglierina al posto delle forbici) con 10 tagli.

e5 (1) Moltiplicando tra loro due numeri, entrambi minori di 1, ottieni ancora un numero minore di 1?
(2) Moltiplicando tra loro due numeri, entrambi maggiori di 1, ottieni ancora un numero maggiore di 1?
(3) Che cosa puoi concludere sulla moltiplicazione tra due numeri, uno maggiore e l'altro minore di 1?

×	<1	>1
<1		
>1		

Rispondi e motiva le tue risposte (se è il caso, ricorrendo a degli esempi). Quindi riassumi le tue conclusioni nella tabella a fianco. Nelle caselle, a seconda dei casi, devi mettere " >1" (che sta per "numero maggiore di 1"), "<1" (che sta per "numero minore di 1") o "D" (che sta per "dipende").

e6 Disegna la pianta della tua classe, comprendente la cattedra e i banchi, su un foglio di carta millimetrata, indicando la scala (che puoi scegliere a tuo piacere).

e7 Abbiamo trovato che nel 1926 la voce trasporti (3420 milioni L) aveva un'incidenza del 3% sul totale dei consumi (124205 milioni L). Prova a calcolare il 3% di 124205. Riottieni il valore 3420? Trovate una spiegazione per questo fenomeno.

e8 Dalla tabella (1.1) risulta che in Italia nel 2008 si sono spesi 17 587 milioni (17 587 000 000) di € in tabacco. Ovviamente questo dato non è esatto, ma è stato arrotondato ai milioni (cioè è stato espresso in milioni e poi arrotondato alle unità). Inventa qualche valore che potrebbe rappresentare la spesa esatta.

e9 Osservate gli istogrammi di ➨ figura 8. Il fatto che sia diminuita l'incidenza percentuale delle spese alimentari significa che gli italiani mangiano meno di un tempo?

e10 Non abbiamo sotto mano la CT e vogliamo eseguire alcuni calcoli. Non ci interessa il risultato esatto, ma solo una stima di esso. Possiamo precedere come nei seguenti esempi:

$$2681/354 \sim 3000/400 \sim 30/4 \sim 7; \qquad \frac{1860}{376891} \sim \frac{2\cdot10^{-3}}{4\cdot10^5} = \frac{20\cdot10^2}{4\cdot10^5} = 5\cdot10^{-3} = 0.005;$$

$$15384\cdot187 \sim 15000\cdot200 = 3000000; \qquad 89325\cdot714213 \sim 9\cdot10^4\cdot7\cdot10^5 = 63\cdot10^9 \sim 6\cdot10^{10}$$

cioè arrotondando i numeri a 1 o 2 cifre significative ed eseguendo i calcoli sui valori arrotondati. *Esegui* analogamente le seguenti operazioni:

$843\cdot279615 \sim$

$\frac{843}{279615} \sim$

$\frac{3675843}{19} \sim$

e11 Vogliamo controllare o avere un'idea più concreta dei dati della tabella (1.1). Proviamo ad esempio a stimare da soli l'ordine di grandezza di quanto si spendeva nel 2008 in trasporti. Gli spostamenti quotidiani sono quelli che incidono in massima parte su questa spesa; in prima approssimazione possiamo limitarci a un mezzo di trasporto pubblico, e supporre che una persona facesse mediamente due corse al giorno e che un biglietto costasse circa 2 €. Nel 2008 in Italia vi erano 60 milioni di persone. Dobbiamo quindi calcolare:

(costo di un biglietto) · (n° delle corse) · (n° dei giorni in un anno) · (n° dei presenti in Italia) =
$2 \cdot 2 \cdot 365 \cdot 60000000$

Calcola questo valore senza usare la CT, come suggerito nel quesito precedente, e confronta l'ordine di grandezza del risultato con quello del valore indicato dalla tabella.

e12 Stima in modo simile a quanto fatto nell'es. precedente la quantità di parole presenti in questa scheda e la spesa complessiva in quaderni sostenuta in un anno dagli studenti della tua scuola.

e13 Accantonando 1 € alla settimana quanto tempo impiegherai per mettere da parte la somma di 600 €?

e14 La tabella seguente permette di confrontare l'evoluzione (in lire) delle retribuzioni e quella della spesa pro-capite per beni alimentari. Le percentuali riportate nell'ultima colonna non indicano esattamente quanta parte dello stipendio veniva spesa mediamente in alimentari, infatti:

– con uno stipendio venivano mantenute più persone;

– la retribuzione considerata è quella di una particolare categoria di lavoratori; ve ne erano altre con stipendi più bassi, altre con stipendi più alti; e vi erano redditi non da lavoro dipendente (negozianti, artigiani, professionisti, imprenditori, proprietari terrieri, …).

La tabella dà comunque un'idea di come è cambiata l'incidenza delle spese alimentari.

anno	spesa totale per alimentari	popola-zione	spesa alimentare pro-capite	spesa pro-capite arrotondata	retribuzione del dipendente del quesito e3	rapporto (percent.) tra spesa aliment. pro-capite e retrib.
1926	$7.77 \cdot 10^{10}$	$4.0 \cdot 10^7$	$1.9425 \cdot 10^3$	$1.94 \cdot 10^3$	$9.15 \cdot 10^3$	21%
1945	$9.42 \cdot 10^{11}$	$4.5 \cdot 10^7$	$2.0933\ldots \cdot 10^4$	$2.09 \cdot 10^4$	$7.34 \cdot 10^4$	29%
1965	$1.02 \cdot 10^{13}$	$5.2 \cdot 10^7$	....	....	$1.42 \cdot 10^6$	....
1985	$1.16 \cdot 10^{14}$	$5.7 \cdot 10^7$	....	....	$1.71 \cdot 10^7$	....

Completa la tabella. Nella 5ª colonna ("spesa arrotondata") approssima i valori a 3 cifre significative, nell'ultima arrotonda le percentuali alle unità. Per calcolare il rapporto non battere i dati della spesa pro-capite scritti nella colonna 5ª ma utilizza il valore che la CT ha ancora sul visore. Ad esempio la seconda riga è stata calcolata nel seguente modo:

– 9.42 [E] 11 [÷] 4.5 [E] [=]

– si è scritto nella 4ª colonna il numero (2.09333…E4) comparso sul visore

– [÷] 7.34 [E] 4 [×] 100 [=]

– si è scritto nell'ultima colonna l'arrotondamento del numero comparso sul visore

– si è scritto nella 5ª colonna l'arrotondamento del dato scritto nella 4ª.

e15 Rispetto alla prima metà del Novecento la quantità e la qualità dei beni alimentari che una persona consuma è sicuramente aumentata. Tuttavia dall'ultima colonna della tabella del quesito precedente o dai grafici di figura 8 si vede che la porzione di stipendio spesa per l'alimentazione è diminuita. Ciò si spiega col fatto che oggi, mediamente, si guadagna molto più di allora anche in valore effettivo.

Se è vero che si possono fare molte più spese in generi non alimentari, occorre però osservare che queste spese spesso sono diventate "necessarie": sono aumentati i beni e i servizi che dobbiamo pagare per "*sopravvivere*". Ad esempio oggi quasi tutti devono impiegare dei mezzi di trasporto per raggiungere il posto di lavoro. Per essere aggiornati su ciò che succede, per conoscere nuove disposizioni di legge, per orientarsi nelle scelte politiche, … dobbiamo leggere giornali, guardare la televisione, … mentre un tempo (con una società meno complessa, città più piccole, …) era più facile accedere diversamente alle informazioni. Per andare a scuola fino a 16, 19 o più anni dobbiamo acquistare libri, pagare tasse d'iscrizione, … mentre un tempo non c'erano gli attuali livelli di obbligo scolastico e i mestieri richiedevano titoli di studio più bassi. …

Del resto senza l'aumento dei redditi non vi sarebbe stato sviluppo produttivo: affinché i beni prodotti vengano venduti è necessario che le persone abbiano la possibilità economica di acquistarli.

Sai *trovare* altri beni e servizi che ora (ma non nella prima metà del Novecento) sono diventati "*di sussistenza*"?

e16 Nel periodo A le monete in circolazione di taglio più piccolo sono quelle da 5 e 10 centesimi di euro, nel periodo B sono 5 e 10 lire, nel periodo C quelle da 2 e 1 lira. Tre persone devono suddividersi in parti eguali 1000 unità monetarie (€ o L). Quale somma (in moneta circolante) spetterebbe a ciascuno nei tre periodi?

1000/3 = [sul visore della CT] ...
somma spettante se si è nel periodo A: ... se si è in B: ... se si è in C: ...

e17 Se invece le tre persone del quesito e16 devono formare 1000 unità monetarie contribuendo in parti eguali, qual è la somma in moneta circolante che ciascuno deve versare?

somma spettante se si è nel periodo A: ... se si è in B: ... se si è in C: ...

e18 Ecco il risultato di 20/3 ottenuto con tre CT differenti. Descrivi il comportamento di ciascuna delle tre CT usando i concetti introdotti nel §6.

(1) 6.6666666 (2) 6.6666667 (3) 6.666666666

e19 Un piccolo caseggiato è suddiviso in 6 appartamenti di diverse dimensioni, tre di 76 m^2 e tre di 69 m^2. Alcune spese comuni (coloritura dei muri esterni, cambiamento del portone, riparazione del tetto, …) vengono ripartite in proporzione alla diversa estensione degli appartamenti. Per facilitare i conteggi la superficie di ogni appartamento viene espressa in millesimi di caseggiato, cioè viene posta uguale a 1000 la superficie complessiva degli appartamenti e vengono calcolate in proporzione le "quote millesimali" corrispondenti ai diversi appartamenti.

Calcola la quota millesimale (arrotondata ai decimi) di ogni appartamento e spiega il procedimento che hai impiegato.

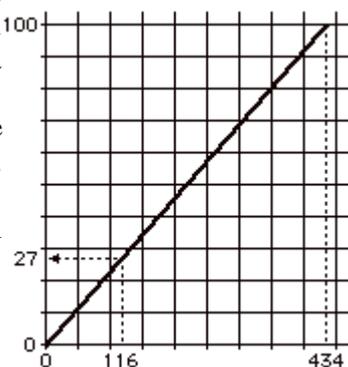
e20 Il prodotto W viene venduto a peso. Sonia compra del W spendendo 8.35 €. Tornata a casa, non ricordandosi del prezzo di W, pesa la quantità acquistata e trova che il suo peso è di circa 760 grammi («circa» poiché la bilancia di Sonia va di 5 grammi in 5 grammi; il peso esatto in grammi potrebbe essere 762 o 759 o …).

Quanto costa al chilogrammo W?

Al variare del peso il costo di W varia in proporzione: a peso doppio corrisponde doppio costo, e così via. Qual è il fattore di proporzionalità "peso (in kg) → costo (in €)"? Qual è il fattore di proporzionalità "peso (in g) → costo (in €)"?

e21 Impiegando un foglio di carta millimetrata trova l'ampiezza del settore con cui rappresentare l'incidenza della voce "alimentari" nel 1985 (➔ quesito 36) procedendo graficamente (➔ figura 7, riprodotta a fianco).

Sull'asse verticale invece delle percentuali rappresenta le ampiezze angolari; con 1 mm rappresenta 2° (quindi con 1 cm rappresenta 20°, con 18 cm 360°). Verifica se ottieni 96°.

Procedi analogamente per le altre voci e confronta i valori trovati con quelli che avevi ottenuto nel ➔ quesito 41.

e22 Luigi, in attesa dell'autobus all'uscita da scuola (in centro città), vuole fare un piccolo studio statistico: trovare quante persone viaggiano mediamente in un'automobile in un'ora di punta. Durante due successivi "rossi" di un semaforo vicino, annota su un foglio per ogni macchina ferma il numero dei passeggeri (compreso l'autista) che ha a bordo. Fa 28 annotazioni:

2	1	3	1	1	1	2	4	1	2	2	1	2	3
1	1	3	1	4	1	2	2	1	3	1	1	1	3

Qual è il numero medio di passeggeri rilevato da Luigi? Effettua il calcolo con la CT nei due seguenti modi:

(1) eseguendo direttamente:

$$\frac{2 + 1 + 3 + 1 + 1 + \ldots + 1 + 3}{28}$$

(2) contando il numero delle volte che compare 1 (sia N_1), il numero delle volte che compare 2 (sia N_2), il numero delle volte che compare 3 (sia N_3), il numero delle volte che compare 4 (sia N_4) e infine calcolando:

$$\frac{1 \cdot N_1 + 2 \cdot N_2 + 3 \cdot N_3 + 4 \cdot N_4}{28}$$

Quale dei due metodi hai trovato più conveniente? perché?

e23 Nel manuale d'uso per le CT prodotte dalla ditta ZZ si legge:

«Le calcolatrici ZZ sono predisposte anche per i calcoli statistici: per un insieme di numeri è possibile calcolare la loro media, la loro somma, …. Vediamo un esempio (in alcuni modelli il tasto per introdurre i dati è indicato con DATA invece che con Σ+):

[OFF] [ON]	*0*	Azzeramento generale
14	*14*	Battitura del 1° dato
[Σ+]	*n =* *1*	Sua introduzione (compare l'indicazione che è stato inserito 1 dato)
6	*6*	Battitura del 2° dato
[Σ+]	*n =* *2*	Sua introduzione (compare l'indicazione che i dati inseriti sono 2)
6	*6*	Battitura del 3° dato
[Σ+]	*n =* *3*	Sua introduzione (compare l'indicazione che i dati inseriti sono 3)
6	*6*	Battitura del 4° dato
[Σ+]	*n =* *4*	Sua introduzione (compare l'indicazione che i dati inseriti sono 4)
[$\bar{x}$]	*n =* *8*	Compare la media aritmetica dei dati introdotti
[Σx]	*32*	Compare la somma dei dati introdotti
[n]	*8*	Compare il numero dei dati introdotti

Nei modelli delle calcolatrici ZZ che sono dotati del tasto [FRQ] invece di battere tre volte il dato 6 si poteva procedere nel seguente modo:

14	*14*	Battitura del 1° dato
[Σ+]	*n =* *1*	Sua introduzione (compare l'indicazione che è stato inserito 1 dato)
6	*6*	Battitura del 2° dato
[FRQ]	*fr =* *00*	Scelta di assegnare al dato una frequenza (n° di volte per cui prenderlo)
3	*fr =* *03*	Battitura della frequenza
[Σ+]	*n =* *4*	Introduzione per 3 volte di 6 (compare l'indicazione che i dati inseriti sono 4)
[$\bar{x}$]	*8*	Compare la media aritmetica dei dati introdotti »

Ricordiamo che nei tasti delle CT spesso si usa *x* per indicare il dato introdotto; ad esempio [1/x] e [−x] indicano il calcolo del reciproco e il calcolo dell'opposto del numero visualizzato.

Analogamente [Σx] e [$\bar{x}$] indicano il calcolo della somma e il calcolo della media della sequenza di dati introdotti. Il simbolo S è la lettera greca "sigma", che viene pronunciata come la nostra "esse"; qui viene usata per ricordare la parola "somma" [Σ+] indica l'aggiunta di un nuovo dato alla sequenza di dati che devono essere sommati (e di cui deve essere calcolata la media); in alcune CT è presente anche [Σ−] per indicare la cancellazione dell'ultimo dato della sequenza (serve per correggere eventuali errori di battitura).

I calcoli statistici in genere appaiono come significati "secondari" di qualche tasto; ad esempio [2nd] [4] . Alcune CT sono dotate di un apposito tasto, [STAT] o un tasto simile, che attiva il significato statistico dei tasti; questo permane fino a che non si ribatte [STAT] .

• Tra i due procedimenti esemplificati nel manuale d'uso quale corrisponde al procedimento (1) del quesito e22, quale al procedimento (2)?

• Quale conteggio viene automatizzato rispetto ai procedimenti senza impiego dei tasti statistici?

• Come potresti usare i tasti statistici per battere una sequenza di tasti alternativa a quella del quesito 54?

• Prova a usare il programma **Stat**, o un altro programma simile, per effettuare gli stessi calcoli esemplificati nei manuali delle due CT [nella finestra di input batti i dati su righe diverse; se un dato ha frequenza maggiore di uno metti una virgola e la frequenza subito dopo il dato; ogni volta che clicchi [I] vengono ricalcolate la media e il numero totale dei dati].

e24 Considera i seguenti procedimenti di calcolo, in particolare le parti indicate in corsivo:

(1) *45·79·100000+789·26·100000 → (45·79+789·26)·100000*
(per semplificare l'impostazione del calcolo sulla CT, riducendo il n° di tasti da battere)

(2) *45/17 – 12/17 → (45–12)/17*
(per battere sulla CT un'unica divisione per 17)

(3) 15075/3 → *(15000+75)/3 → 15000/3+75/3* → 5000+25 → 5025
(nel calcolo mentale è più facile dividere per 3 separatamente 15000 e 75)

(4) 89·4 → *(90–1)·4 → 90·4–1·4* → 360–4 → 356
(nel calcolo mentale è più facile moltiplicare per 4 separatamente 90 e 1)

Nel caso (1) il nuovo termine è stato ottenuto estraendo il moltiplicatore che era comune ai termini di una addizione e mettendolo come fattore dell'intera somma:

moltiplico per 100000 il risultato della addizione 45·79+789·26
invece che i due addendi 45·79 e 789·26.

Nel caso (2) il nuovo termine è stato ottenuto estraendo il divisore che era comune ai termini di una sottrazione e mettendolo come fattore dell'intera differenza:

divido per 17 il risultato della sottrazione 45–12
invece che i due termini della sottrazione 45 e 12.

Possiamo riassumere entrambi i casi dicendo che il termine iniziale è stato *trasformato* estraendo il fattore (moltiplicatore o divisore) che era comune ai termini di una addizione o di una sottrazione e mettendolo come fattore dell'intera somma o differenza.

Questo tipo di trasformazione viene chiamato ***raccoglimento a fattore comune***.

Nelle trasformazioni evidenziate in corsivo nei casi (3) e (4) il nuovo termine è ottenuto distribuendo il fattore (moltiplicatore o divisore) di una somma (o una differenza) tra i diversi termini di essa:

– nel caso (3) divido per 3 gli addendi 15000 e 75 invece che il risultato dell'addizione;

– nel caso (4) moltiplico per 4 i termini della sottrazione 90 e 1 invece che 90–1.

Questo tipo di trasformazione viene chiamato ***distribuzione del fattore comune***.

Le due trasformazioni sono l'una l'inversa dell'altra, e possono essere sintetizzate con la stessa formula, che letta da sinistra a destra dà una trasformazione, letta da destra a sinistra dà l'altra.

• Per ottenere tale formula, *inserisci* nei riquadri sottostanti i simboli: **+ · ( )**

• *Scrivi* nella tabella i valori che assumono *a*, *b* e *c* nei casi considerati.

[tieni conto che, ad esempio, 45/17 può essere pensato come 45·(1/17) e 90–1 come 90+(–1)]

☐ *a* ☐ *b* ☐ ☐ *c* = *a* ☐ *c* ☐ *b* ☐ *c*

	a	*b*	*c*
(1)	45·79		100000
(2)		–12	
(3)			1/3
(4)	90		

1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini:

posto di una cifra (dopo ques.8), *potenza* n-*esima* (tra ques.8 e ques.10), *notazione scientifica* (dopo ques.16), *ordine di grandezza* (dopo ques.16), *proporzionalità* (prima di ques.19), *percentuale* (prima di ques.22, dopo ques.24), *media aritmetica* (§5), *approssimazione per arrotondamento e troncamento* (prima di ques.26, dopo ques.58).

2) Su un foglio da "quadernone", nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").

Esempio di svolgimento parziale di quanto richiesto nel riquadro

1) Vedi le parti già evidenziate (in rete) per le voci "posto di una cifra", "notazione scientifica", "ordine di grandezza", "potenza n-esima", nel ➨ paragrafo 1.

2) "posto di una cifra": «Nella misura 37.169 km la cifra di posto –3 rappresenta i metri»

"potenza n-esima": «L'area di una faccia di un cubo si ottiene elevando alla seconda la misura dello spigolo; il volume si ottiene invece elevandola alla terza»

3) In questa scheda abbiamo esaminato alcune statistiche di tipo economico e abbiamo visto alcuni strumenti matematici utili per rappresentare e analizzare dati.

Abbiamo considerato come è cambiato il modo di spendere i soldi per i vari tipi di beni e di servizi nel Novecento. Abbiamo visto come rappresentare numeri molto grandi e molto piccoli, a mano o con la calcolatrice, come confrontare numeri di diversa grandezza, …

[il riassunto deve proseguire riferendosi ai paragrafi successivi]

Specchietto con i principali tasti presenti sulle CT più diffuse

Nel seguito *M* e *V* indicano rispettivamente la *memoria* e il *visore* della CT.

Per ogni tasto è indicato il "comando" che diamo alla CT con la pressione di esso.

(1) [M] [Min] [M→x] [M=] [STO] ("STO" deriva dall'inglese "store", che significa "immagazzina")
$M \leftarrow V$: *ricopia* in *M* il numero che è in *V* (cancellando da *M* ciò che vi avevi copiato in precedenza)

(2) [M+] [SUM]
$M \leftarrow M+V$: *somma* al numero che è in *M* il numero che è in *V*

(3) [M–]
$M \leftarrow M–V$: *sottrai* dal numero che è in *M* il numero che è in *V*

(4) [MR] [RM] [RCL] ("RCL" deriva dall'inglese "recall", che significa "richiama")
$V \leftarrow M$: *richiama* il contenuto di *M*, cioè *fai* apparire su *V* il numero che è in *M*

(5) [CM] [MC] ("CM" deriva dall'inglese "clear the memory", che significa "sgombra la memoria")
$M \leftarrow 0$: *cancella* il numero registrato in *M*, cioè *metti* in *M* il numero 0

(6) [MRC] [MR/CM]
se ti premo 1 volta *comportati* come [MR], se ti premo 2 volte *comportati* come [CM]

(7) [C] [CE] [Clx] ("CE" deriva dall'inglese "clear the entry", che significa "sgombra l'entrata",cioè il visore; "clx" sta per "sgombra x", dove x sta al posto della nostra *V*)
$V \leftarrow 0$: *cancella* il contenuto di *V*, cioè *metti* in *V* il numero 0 (in modo che io possa ribattere l'ultimo numero che ho battuto); vedi anche le successive "osservazioni sui tasti di cancellazione"

(8) [AC] [C] ("AC" deriva dall'inglese "clear all", che significa "sgombra tutto")
cancella il numero che è su *V* e i numeri che ho battuto in precedenza, in modo che io possa ribattere l'intera operazione (non vengono cancellati i dati messi in *M*); vedi anche le successive "osservazioni sui tasti di cancellazione"

(9) [MU] (tasto presente in alcune CT; "MU" possiamo ricordarlo come "mantieni l'ultimo")
cancella le operazioni e i dati battuti in precedenza, mantenendo solo l'ultimo dato, cioè quello che appare sul visore

Indicazioni per l'uso dei tasti di memoria

Con le CT *dotate del tasto (1)* si può impiegare questo tutte le volte che si vuole memorizzare un dato. In questo modo possiamo evitare di azzerare prima la memoria, come si dovrebbe fare col tasto (2).

Le CT *prive del tasto (1)* possono impiegare (2) dopo aver prima (eventualmente) azzerato la memoria, cioè [M] equivale a [CM] [M+].

Con una CT *priva del tasto (1)* e *dotata del tasto (6)* se in *M* è già memorizzato un numero non è facile memorizzare il numero che appare sul visore: cancellando la memoria con due pressioni di [MRC] il numero che è sul visore scompare; si può tuttavia ricorrere a qualche trucco: ad es. se in *M* c'è 3579 e sul visore ho 0.132547 posso fare [+] [MRC] [MRC] 0 [=] (con il "+" ho impostato "0.132547+", con i due "MRC" ho cancellato 3579 da *M*, con "0=" ho calcolato 0.132547+0); a questo punto ho 0.132547 sul visore e la memoria libera; posso quindi premere [M+].

Le CT *prive del tasto (5)* e del tasto (6) possono azzerare la memoria impiegando (1), cioè al posto di [CM] si può battere 0 [M] (però bisogna ricordarsi di fare questa operazione prima di impostare i calcoli: dovendo battere il numero 0 perdiamo il contenuto di *V* che avremmo voluto memorizzare).

Se non si ha (1) si possono impiegare (4) e (3), cioè si può battere [MR] [M–] (si richiama il contenuto di *M* e poi lo si sottrae da *M* stessa, azzerandola: $V \leftarrow M$, $M \leftarrow M–V = 0$; in breve: $M \leftarrow M–M = 0$).

Alcune CT sono *prive del tasto (4)*. In genere in questi casi al suo posto si può battere [M] [=].

Alcune CT sono dotate di due memorie *M1* e *M2* e dei tasti [M1], [M2], [STO].

[M1] [STO] fa: $M1 \leftarrow V$, [M1] [=] fa: $V \leftarrow M1$. Analogamente agiscono [M2] [STO] e [M2] [=].

Osservazioni sui tasti di cancellazione

Come si è visto il tasto [C] può funzionare a volte come (7), a volte come (8), ma in tal caso caso c'è anche un tasto [CE]. In alcuni casi funziona come (7) se premuto una volta, come (8) se premuto due volte. In alcuni casi, in presenza di [C] e [CE], il tasto [AC] cancella anche i dati messi in *M*.

Alcune CT sono dotate anche di un tasto [←] o [→] che permette di cancellare (e poi eventualmente ribattere corrette) le ultime cifre del numero battuto, a patto che non si sia già premuto un tasto di operazione.

Altre osservazioni

Alcune CT hanno alcuni tasti sovrastati da una *seconda scritta*. Premuti normalmente funzionano secondo la scritta impressa sul tasto, premuti dopo aver schiacciato un opportuno tasto, in genere [2nd] o [f⁻¹] o [2ndf] o [INV], funzionano secondo la scritta soprastante.

In alcune CT il tasto [+/–] o [±] o [–x] è indicato con [CHS] ("change the sign"). Molte CT sono dotate di un tasto [%], ma il suo funzionamento può variare molto da una CT all'altra. Per questo non lo impiegheremo.

Vi sono CT dotate dei tasti di *parentesi* (su ciò ci soffermeremo in seguito).

CT capaci di memorizzare formule e procedimenti di calcolo

Vi sono CT che permettono di visualizzare sul visore non un solo dato, ma un termine contenente dati, operazioni e parentesi. In genere hanno un tasto ([EXE] o [ENTER] o …) con cui l'utente può comunicare alla CT di avere finito di battere il termine e ordinarle si completare il calcolo.

Infine vi sono *calcolatori tascabili programmabili* (dotati di tasti per le lettere oltre che tasti per le cifre) che sono impiegabili anche come CT.

Per memorizzare i dati si possono usare lettere qualunque. Spesso moltiplicazione, divisione ed elevamento alla potenza invece che con "×", "÷" e "x^y" sono indicati rispettivamente con "*", "/" e "^" (o "↑").

Ad esempio i calcoli illustrati prima del ➨ quesito 30 possono essere svolti nel seguente modo:

[T] [=] 124205 [EXE]   77749 [/] [T] [EXE]   3226 [/] [T] [EXE]   …

In genere non è presente il tasto per il cambio segno. Mentre con una usuale CT per calcolare 5 · – 3 devo battere: 5 [×] 3 [+/–] [=], con questi calcolatori posso battere 5 * – 3 , che viene interamente riprodotto sul visore, e poi premere [EXE] : il calcolatore legge l'intera espressione e dal contesto "capisce" che il segno "–" è da intendersi come cambio segno invece che come simbolo della sottrazione. In genere non è presente neanche il tasto per il reciproco.

La automazione
Dalle macchine semplici alle macchine programmabili

Scheda **1**

Che cosa trasformano le macchine?

0. Introduzione

Sin dalla nascita siamo abituati a *convivere con le macchine*. Usiamo macchine per:
– spostarci (passeggini, autobus, biciclette, ascensori, …),
– svagarci (carillon, giocattoli, televisioni, radio, mangiacassette, videogiochi, …),
– organizzare il tempo (orologi),
– conservare e preparare il cibo (frigoriferi, macchine per il caffè, frullatori, …),
– comunicare (telefono, tastiera di uno sportello automatico, …),
– fare calcoli (calcolatrici),
– …

Si potrebbe continuare con un lunghissimo elenco, più lungo di quanto lì per lì si possa pensare. Siamo tanto abituati a questa convivenza che non facciamo neanche caso a tutte le macchine con cui abbiamo a che fare durante la giornata. Eppure fino a poco tempo fa (un paio di secoli, che sono piccola cosa rispetto alla storia dell'umanità) era stata inventata solo una piccola parte delle macchine attuali; queste macchine, poi, erano in genere assai più rudimentali delle attuali e solo poche persone avevano avuto la possibilità di conoscerle.

Come è cambiato il modo di vivere in seguito a questa massiccia diffusione delle macchine? Come è mutato il modo in cui si lavora, si studia, si pensa, …? Quali sono le attività, le abilità, le conoscenze umane che pian piano sono state *incorporate* nelle macchine?

Riflettere su queste domande può essere utile per capire meglio come è organizzata la società in cui viviamo e per comprendere il ruolo che in essa (nella vita quotidiana, nei mestieri, …) svolgono le macchine (quanto può essere affidato o dipende dalle macchine? quanto dipende dalle scelte umane? …).

Può essere utile anche per capire come l'evoluzione tecnologica porta dei cambiamenti nello sviluppo e nello studio delle discipline. Ad esempio, nel fare matematica, quali attività possono essere delegate al calcolatore invece che essere svolte "a mano"? E quanta e quale matematica è utile per usare consapevolmente un calcolatore?

In ***questa unità didattica*** cercheremo di affrontare alcuni di questi aspetti a partire dalla domanda: che cosa fanno le varie macchine? come possiamo distinguerle in base al tipo di attività che svolgono?

Ci soffermeremo, poi, ad analizzare più a fondo i casi in cui una macchina può funzionare senza il controllo diretto dell'uomo, cioè ad analizzare i *procedimenti automatizzati*. Presteremo particolare attenzione agli aspetti matematici (linguaggi e modi per descrivere questi funzionamenti) e al ruolo del calcolatore.

Il tema dell'automazione e la riflessione sull'uso del calcolatore verranno ulteriormente approfondite in successive unità didattiche.

1. Un gioco d'avventura e alcune elaborazioni statistiche al calcolatore

Avviamo il discorso con due attività che potrete svolgere nell'*aula computer*: un gioco al calcolatore e alcune elaborazioni statistiche automatizzate.

Il castello stregato

Battendo alcuni tasti o azionando altri dispositivi (ad esempio un mouse), in modi che dipendono dal tipo di calcolatori e da come essi sono stati predisposti, trasformerete provvisoriamente i personal computer in *macchine-da-gioco* con cui affrontare il gioco d'avventura "Il castello stregato" [se stai leggendo la scheda da computer, puoi cliccare **qui** per avviare il programma; se usi Windows puoi anche cliccare **qui**].

Farete uno o due tentativi per cercare di uscire dal castello stregato. L'impresa non sarà facile, anche perché, oltre a comportare qualche ragionamento e un po' di fortuna, richiede anche un po' di pratica nell'uso della tastiera del calcolatore. Converrete presto che non conviene procedere con tentativi alla cieca, ma che è meglio cercare di far tesoro degli insuccessi per individuare qual è il comportamento che la macchina-da-gioco tiene di fronte alle vostre mosse. Per aiutarvi qua sotto sono riprodotti, con qualche taglio e modifica, i messaggi scritti che la macchina-da-gioco può inviare durante la vostra avventura.

1 Sei in un castello stregato. Le stanze hanno porte da cui si può passare in una sola direzione. Se sbagli uscita non puoi tornare indietro. Se ti comporterai non in modo improvvisato, riflettendo sulle cose da fare, ma senza perder troppo tempo, forse riuscirai a uscire. Alle domande che ti verranno fatte rispondi battendo la lettera iniziale maiuscola della risposta (e poi il tasto A CAPO per far partire il tuo messaggio).
La stanza in cui ti trovi ha 3 uscite. Sul pavimento ci sono: una carta BANCOMAT (B), un FARETTO (F), una PISTOLA a raggi laser (P), una CALCOLATRICE (C), una TUTA protettiva (T), un sacchetto di MERENDINE (M). Scegli 3 oggetti e inizia la tua avventura, ma tieni presente che per attraversare • l'uscita A devi superare una barriera di raggi x, • l'uscita B devi pagare con il Bancomat, • l'uscita C devi dirigere un fascio di luce in un apposito foro. Scegli l'uscita

2 «Sono TOR-2, robot mangiatutto, abitante della stanza in cui sei entrato e custode della sua unica uscita. Il meccanismo di apertura è faticoso da azionare e per avere l'energia necessaria devo essere alimentato»

3 Appena entri nella nuova stanza la porta ti si chiude dietro. Sei al BUIO.

4 Sei entrato in una stanza con 2 uscite, X e Y. Ti vengono incontro due strani personaggi dall'aspetto identico: grassi, vestiti di rosso, con un buffo cappello. Una voce roca ti dice: «Stai attento. Hai di fronte due gemelli. Uno dice solo verità. L'altro quando dice una falsità poi dice una verità, e viceversa».
Il primo gemello ti dice: «Io sono sempre sincero». Il secondo: «Io sono sempre sincero». Il primo ancora: «Ti conviene passare per X». Quale uscita scegli?

5 Dai da mangiare a Tor-2 un oggetto tra quelli che possiedi.

6 La nuova stanza è vuota. Nell'aria si diffonde una musica: MONEY dei Pink Floid. Boh!?! roba un po' vecchia, ti viene da pensare. Attraversi la stanza. La porta d'uscita non ha maniglia, ma al centro ha una fessura con sopra una piccola iscrizione: «Here money»

7 Sei precipitato in un POZZO profondo 5 m. Le pareti sono viscide. Fai 3 m di salita e poi, di notte, scivoli di 2 m. Arrivato in cima al pozzo ti trovi di fronte a due porte. La porta A conduce in un corridoio la cui uscita rimane aperta solo fino al 4° giorno dalla tua caduta; all'inizio del 5° si chiude. La porta B conduce in un corridoio la cui uscita è aperta solo quando è chiusa l'uscita dell'altro corridoio. Quale porta scegli?

8 Hai scelto la porta meno conveniente. Stai nel corridoio per più di un giorno.

9 Arrivi in una stanza con due uscite. Una è sbarrata da una ragazza bionda che indossa una maglietta con la scritta PEACE. L'altra è sbarrata da un guerriero, dall'aspetto feroce e minaccioso.

10 La ragazza con un sorriso ti lascia passare. Ringraziala con un bacio.

11 La ragazza vede la tua pistola e ti fa un NO con la testa. La vede anche il guerriero, che si fa avanti minaccioso. Immobilizzalo con la tua pistola ed esci dalla stanza. Nella fuga perdi un oggetto.

12 Un contatore Geiger segnala che la stanza è contaminata da radiazioni. Un'uscita è bloccata da un uomo dalla pelle verde a macchie viola. E' un precedente visitatore che si è attardato troppo. Se hai la tuta protettiva puoi soccorrerlo e portarlo fuori dalla stanza aprendo la porta che lui ha davanti. Altrimenti non indugiare, c'è un'altra uscita, imboccala subito. Appena sarai fuori da questo labirinto cercherai aiuto.

13 Ti trovi in una stanza le cui uscite A e B sono comandate da un automatismo che apre A se calcoli velocemente il risultato della operazione che appare qua sotto, apre B, ma solo dopo 2 minuti, altrimenti.

14 DIVIDING ROOM. Sei nella stanza dove si fanno le divisioni. Se hai la calcolatrice puoi trattenerti. Con poca fatica troverai un bottone con cui aprirai la porta finale e uscirai da questa (brutta ?) avventura.

15 Un custode ti si fa davanti minaccioso. Se vuoi puoi provare a buttarti dalla finestra. Altrimenti aspetta e vedi che vuole il custode. Che fai, ti butti dalla finestra (F) o aspetti il custode (C) ?

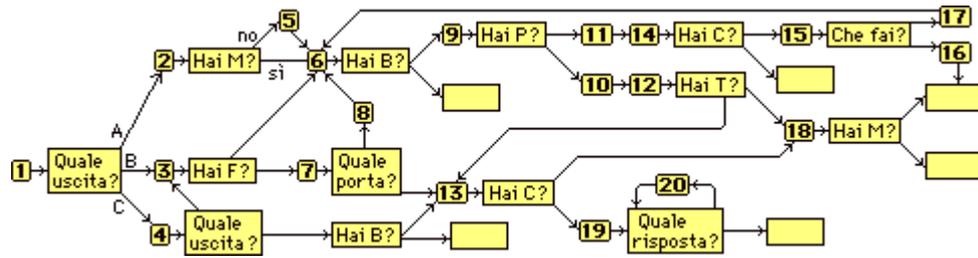
16 AMEN … e buona digestione al coccodrillo.

17 Si apre una botola e precipiti in un tunnel. Improvvisamente ti trovi in una stanza che già conosci.

18 Il leone che hai davanti è affamatissimo. Svelto, gettagli del cibo e scappa

19 «Non è vero che questa stanza non ha uscite» è scritto su un cartello. Una voce ridente afferma «L'affermazione sul cartello è falsa». Val la pena che tu ti metta a cercare un'uscita? (s/n)

20 Hai sbagliato risposta. Riprova.

Osservando il comportamento della macchina-da-gioco durante i tuoi tentativi potrai capire come completare il seguente *diagramma* (cliccalo per ingrandirlo), che indica come la macchina prosegue a seconda delle risposte del giocatore.

1 Completa il diagramma: scrivi a fianco di ogni freccia che esce da un riquadro con domande la risposta corrispondente e metti in ogni riquadro vuoto "OK" quando esso corrisponde all'uscita dal castello stregato e "KO" quando corrisponde a un insuccesso.

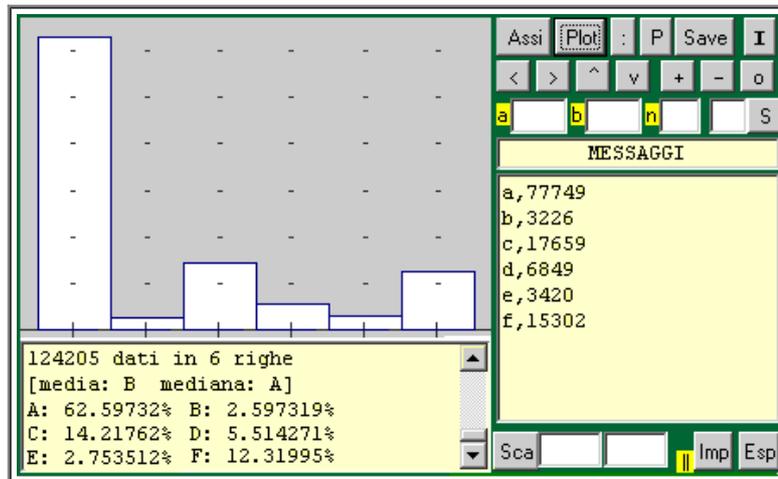
Poi, osservando il diagramma completato, individua quali sono i casi (scelta degli oggetti iniziali, scelte durante il percorso) in cui il gioco si conclude positivamente.

....

Statistiche

Analogamente al caso precedente, se non lo avete già fatto nell'ambito della scheda 1 di *Le statistiche* (➔ LS-1 §3), trasformerete provvisoriamente i personal computer in *macchine-statistiche.* Vediamone un esempio d'uso per studiare come nel 1926 i consumi degli italiani si ripartivano nelle varie voci (vedi tabella seguente).

voci di spesa	alimentari	tabacco	vestiario	abitazione	trasporti	altro
milioni di lire	77749	3226	17659	6849	3420	15302

L'utente, per ciascuna voce, batte una lettera seguita dal dato corrispondente. Poi clicca [I] per introdurre i dati (farli "leggere" dal computer). In un'altra finestra compare la distribuzione percentuale.

Cliccando [Plot] compare, in un'ulteriore finestra, il relativo istrogramma (cliccando un'altra volta [Plot] comparirebbe la rappresentazione come diagramma a settori circolari).

2 Prova a usare questa macchina-statistica per fare elaborazioni statistiche che hai già realizzato impiegando CT e sussidi grafici (carta millimetrata o quadrettata, riga, goniometro, …) e confronta quanto hai ottenuto nei due modi.

2. Movimenti e informazioni

Che cosa fa la macchina-da-gioco considerata nel paragrafo precedente? "Legge" i messaggi che il giocatore invia attraverso la tastiera e "risponde" con altri messaggi. Possiamo dire che è una macchina che trasforma informazioni in informazioni.

Analogamente la macchina-statistica legge le informazioni che l'utente batte o comunica cliccando qualche bottone e le elabora producendo altre informazioni.

Nella *figura 1* sono disegnate due macchine d'uso più quotidiano: il cavatappi e il telefono. Quali sono le loro funzioni?

Il *cavatappi* raffigurato trasforma il movimento rotatorio che facciamo compiere ai due bracci nel movimento rettilineo della "vite" che tira il tappo. Il *telefono* trasforma i messaggi sonori (comunicati con la voce) in segnali elettrici che viaggiano attraverso il cavo e, viceversa, trasforma i segnali elettrici in messaggi sonori (che raccogliamo con l'orecchio).

Possiamo dire che il cavatappi è una macchina che trasforma movimenti in movimenti e che il telefono, come la macchina-da-gioco, è una macchina che trasforma informazioni (sotto forma di suoni o di segnali elettrici) in informazioni (sotto forma di segnali elettrici o di suoni). Cioè, schematizzando:

movimento → cavatappi → movimento   informazioni → telefono → informazioni

figura 1

In realtà il cavatappi non trasforma solo movimento. Per muovere le mani e percorrere uno spazio s_1 dobbiamo applicare sui bracci una forza F_1; a sua volta la vite, oltre a muoversi percorrendo uno spazio s_2, esercita una forza F_2 sul tappo. L'idea che sta dietro alla macchina-cavatappi è proprio quella di distribuire il lavoro che si deve compiere per estrarre il tappo (applicare una forza F per un tratto s) su uno spazio maggiore in modo da rendere minore la forza da applicare. Possiamo dire che il cavatappi trasforma l'*energia meccanica* prodotta dall'uomo distribuendola su uno spazio diverso.

Anche il telefono trasforma energia: dalla cornetta del telefono entrano informazioni sotto forma di energia meccanica (le oscillazioni della membrana del microfono provocate dalla nostra voce) e nel cavo circolano informazioni sotto forma di energia elettrica.

Noi non ci occuperemo di questi aspetti, che potrai approfondire successivamente nello studio della fisica. Continueremo quindi a parlare di macchine che trasformano informazioni e movimenti anche se si tratta di una *modellizzazione* che, *dal punto di vista della fisica*, non sarebbe del tutto rigorosa.

3 Telecomando, stufa elettrica, cric, calcolatrice tascabile, macchina distributrice di bevande, serratura: tra queste macchine sai trovare quelle che trasformano movimenti in movimenti? e quelle che trasformano informazioni in informazioni?

....

3. Macchine semplici, motori, automatismi

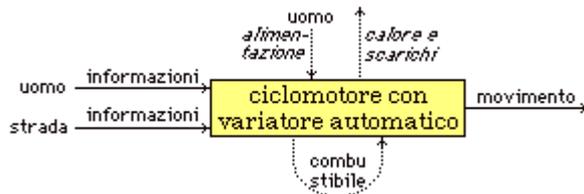
Consideriamo una ***bicicletta dotata di cambio***. Possiamo schematizzare ciò che fa questa macchina con il grafo a lato:

uomo — movimento → bicicletta con cambio → movimento
uomo — informazioni → bicicletta con cambio

l'uomo produce movimento azionando i pedali, la bicicletta trasforma la rotazione dei pedali in rotazione delle ruote; il movimento che si ottiene non dipende solo dal movimento dei pedali, ma anche dal rapporto di trasmissione che l'uomo ha scelto; questa informazione viene "comunicata" alla bicicletta mediante la leva del cambio.

Come sai, cambiare il rapporto di trasmissione serve ad adattare il comportamento della bicicletta al tipo di percorso. Ad esempio se si deve affrontare una salita conviene passare ad un rapporto che a ogni pedalata faccia corrispondere meno giri della ruota, in modo che il dislivello da superare venga distribuito in un maggior numero di pedalate.

Consideriamo un ***ciclomotore con variatore di velocità automatico***.

Anche se questa macchina è impiegata per scopi simili alla macchina precedente, ne differisce per vari aspetti:

– mentre la moto è in funzione l'uomo non produce movimento ma (attraverso la manopola dell'acceleratore) fornisce solo informazioni che regolano l'afflusso del combustibile;
– il rapporto di trasmissione viene variato automaticamente dal ciclomotore stesso, sulla base della resistenza che incontra (cioè sulla base delle "informazioni" che gli vengono dalla strada che sta percorrendo).

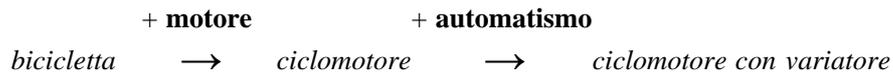
Il ciclomotore non produce solo movimento, ma disperde nell'ambiente anche calore e gas di scarico. Nel seguito del discorso trascureremo aspetti come questo, che, per quanto importanti, sono secondari rispetto alla discussione che stiamo svolgendo. Del resto anche nel caso della bicicletta, del telefono e del cavatappi avremmo dovuto considerare la presenza di dispersioni di calore, anche se modeste (l'attrito degli ingranaggi, l'attrito del tappo contro la bottiglia, il surriscaldamento dei fili del telefono).

Ogni tanto l'uomo deve anche introdurre combustibile nel serbatoio, cioè alimentare il ciclomotore, ma è il ciclomotore che trasforma questo "alimento" in movimento: a differenza della bicicletta questa macchina (come l'automobile, l'aeroplano, gli animali e l'uomo stesso) è *semovente*, cioè in grado di produrre autonomamente l'energia meccanica per spostarsi.

In altre parole una macchina semovente è composta da una ***macchina semplice*** (macchina, come la bicicletta o il cavatappi, che trasforma solo movimenti) a cui viene applicato un ***motore*** (macchina in grado di produrre movimento trasformando altre forme di energia).

Nel ciclomotore con variatore automatico non è *automatizzata* solo la produzione del movimento ma anche i cambiamenti di *comportamento* di fronte al variare della pendenza della strada (o della resistenza opposta dal vento o …). Non c'è solo un motore, ma anche un ***automatismo***, cioè un dispositivo che è in grado di modificare il comportamento della macchina senza il diretto intervento dell'uomo, ma *sulla base di informazioni prelevate autonomamente*.

+ **motore** + **automatismo**

bicicletta ⟶ *ciclomotore* ⟶ *ciclomotore con variatore*

Nel caso del nostro ciclomotore l'automatismo è il variatore automatico di velocità. Anche la macchina-da-gioco del paragrafo 1 è regolata da un automatismo che, sulla base delle scelte man mano compiute dal giocatore, sulla base del tempo trascorso, sulla base degli oggetti di cui il giocatore dispone, …, stabilisce i messaggi da far comparire sul video. Lo stesso si può dire per la macchina-statistica.

4 Come puoi schematizzare con grafi simili ai precedenti "ciò che entra e ciò che esce" da uno sportello di informazioni automatico, da un'automobilina telecomandata, dal contachilometri di un'automobile? Confronta le tue idee con quelle dei tuoi compagni e poi riproduci i grafi che avete concordato.

5 Nelle macchine del quesito 4 sono presenti automatismi?

……

……

4. Dati e programmi

Consideriamo un ***carillon***. E` una macchina che produce suoni autonomamente. Sulla superficie laterale di un cilindro sono fissati dei pioletti; man mano che il cilindro ruota i pioletti urtano e fanno vibrare delle lamelle metalliche di diversa lunghezza a cui corrispondono diverse note musicali:

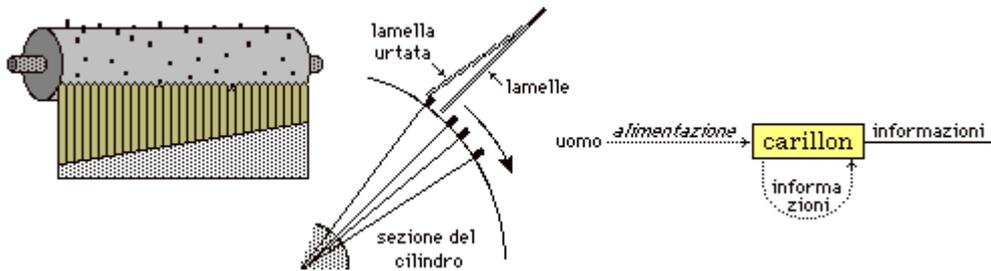



figura 2

La musica prodotta può essere interpretata come una sequenza di informazioni: si susseguono una nota, un intervallo di tempo, una nuova nota, un nuovo intervallo di tempo, … , informazioni che sul cilindro sono rappresentate dalla disposizione dei pioli. L'uomo interviene solo inizialmente per dare la "carica". Questo movimento dell'uomo (a differenza del caso della bicicletta o del cavatappi) non viene trasformato direttamente in altro movimento, ma serve solo ad alimentare il carillon, cioè a fornirgli l'energia necessaria per dare una nuova forma (sonora) alle informazioni "registrate" sul cilindro (dando la corda si comprime una molla a spirale che, poi, rilascia lentamente l'energia immagazzinata).

Il carillon può essere considerato un *automa*, cioè un "robot", una macchina in grado di regolare e guidare autonomamente alcuni dei propri movimenti o di simulare altri comportamenti animali o più propriamente umani. Infatti, una volta che è stato caricato, si comporta come un uomo che suoni uno xilofono. In maniera simile funzionano ad esempio i robot impiegati per il controllo automatico delle tastiere nelle fabbriche che producono macchine da scrivere o da calcolo: sono dotati di dispositivi che percuotono i tasti delle macchine da provare con movimenti simili a quelli eseguiti dalle mani di un uomo. Il ruolo del motore è svolto dalla molla che ha immagazzinato la carica, gli ingranaggi che trasmettono al cilindro il movimento generato dalla molla sono macchine semplici, mentre il ***sistema cilindro-lamelle*** è l'automatismo che in base alle informazioni descritte dai pioletti sceglie quando e quali lamelle azionare.

Consideriamo ora una ***caldaia*** impiegata per il riscaldamento di un caseggiato o di un appartamento. Supponiamo che, come gran parte delle caldaie, oltre a un interruttore manuale, abbia due *forme automatiche di accensione/spegnimento*.

Con la prima (vedi *figura 3*) l'utente seleziona una data temperatura. La caldaia automaticamente passa ripetutamente dallo stato di accensione allo stato di spegnimento in modo da mantenere l'acqua circolante alla temperatura indicata. Questo automatismo, chiamato ***termostato***, è composto essenzialmente da un termometro, che rileva la temperatura dell'acqua, e da un dispositivo di controllo, che verifica se questa temperatura si è discostata troppo da quella selezionata e, in tal caso, fa cambiare stato all'interruttore. Se, ad esempio, il termostato è predisposto per una *tolleranza* di 2° e se è stata scelta la temperatura di 46°, non appena la caldaia fa raggiungere all'acqua la temperatura di 48° il termostato comanda lo spegnimento della caldaia; non appena, poi, la temperatura scende al di sotto di 44° il termostato comanda l'accensione della caldaia, e così via.

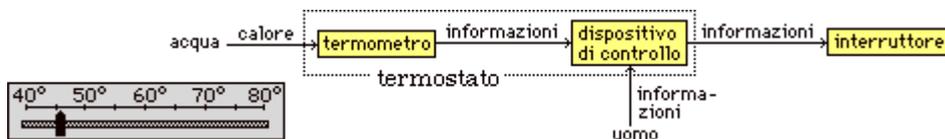



figura 3

La seconda forma di automatismo è un ***timer*** (vedi *figura 4*). Il modello raffigurato funziona in questo modo.

Un orologio fa ruotare un anello che, sul bordo esterno, in corrispondenza di ogni ora, presenta dei piccoli fori. L'ora è indicata dalla levetta posta in alto a sinistra. Ad esempio nella figura l'orologio segna esattamente le 21. Nei fori si possono inserire dei pioletti (in genere chiamati bandierine). La levetta non è altro che un interruttore: non appena una bandierina urta la levetta, questa scatta, ruotando di mezzo giro e la finestrella segnala il cambiamento di stato: da ON (accensione) a OFF (spegnimento) o viceversa.

Nel caso raffigurato si è in on. Appena vengono raggiunte le 22 la bandierina urta la levetta e si passa in off. Si torna in on alle 6 del mattino, alle 9 si ripassa in off per ritornare in on alle 18, e così via. In alcuni timer esistono più fori, ad esempio uno per ogni quarto d'ora, consentendo una scelta più precisa dei tempi di accensione e dei tempi di spegnimento.

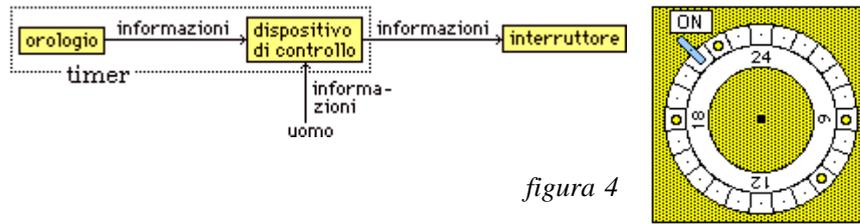
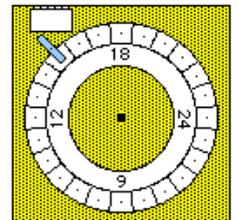



figura 4

Il timer, come abbiamo visto, è composto da un orologio, che man mano aggiorna l'ora, e da un dispositivo di controllo, che in base all'ora segnata e alla collocazione delle bandierine decide lo stato che deve assumere l'interruttore.

In genere sulle caldaie vengono azionati entrambi i dispositivi, per cui la caldaia è accesa solo quando sono in on sia l'interruttore del termostato che quello del timer.

6 Inserisci opportunamente delle bandierine e posiziona su on o su off l'interruttore in modo che il timer raffigurato a fianco, che attualmente segna esattamente le 15, tenga in accensione la caldaia nelle seguenti fasce orarie: dalle 7 alle 10, dalle 17 alle 19, dalle 21 alle 23 (il tempo reale di accensione sarà inferiore a causa delle ulteriori interruzioni determinate dal termostato).

7 Se si ponessero solo una bandierina in corrispondenza delle 7, una in corrispondenza delle 17 e una in corrispondenza delle 23, che cosa accadrebbe?

....

Le informazioni utilizzate dagli automatismi per regolare il comportamento delle macchine a cui sono applicati possono essere distinte in due tipi.

• Alcuni automatismi durante il funzionamento ricevono *informazioni man mano provenienti dall'ambiente o man mano introdotte dall'uomo*. Sono di questo tipo:

– la temperatura fornita dal termometro e quella selezionata dall'uomo impiegate dal termostato per decidere quando trasmettere all'interruttore un segnale elettrico che ne cambi lo stato,
– le informazioni sulla resistenza incontrata durante il percorso man mano ricevute dal variatore automatico del ciclomotore per regolare il rapporto di trasmissione.

• Alcuni automatismi utilizzano anche informazioni che hanno già *incorporate al loro interno o* che, comunque, vengono *introdotte all'entrata in funzione*, non man mano durante il normale funzionamento. Sono di questo tipo:

– il numero e la disposizione delle bandierine nel timer (si tratta di informazioni introdotte dall'utente),
– la disposizione dei pioletti nel sistema cilindro-lamelle del carillon e il modo in cui il costruttore ha regolato il variatore di velocità, fissando come deve variare il rapporto di trasmissione al variare delle informazioni provenienti dall'esterno (si tratta di informazioni incorporate negli automatismi, non modificabili dall'utente).

8 Sai individuare nella macchina-statistica del paragrafo 1 l'utilizzo di informazioni del primo tipo e di informazioni del secondo tipo?

....

....

Chiameremo ***dati*** le informazioni del primo tipo (le informazioni che durante il normale funzionamento provengono man mano dall'esterno) e ***programma*** l'insieme delle informazioni del secondo tipo (le informazioni incorporate o registrate prima dell'entrata in funzione).

Il nome "programma" deriva da "pro", particella che sta per "prima", e da "gramma", che significa "scrittura". Cioè indica le cose "pre-scritte", le cose che si devono fare.

Voi conoscete (o dovreste conoscere) i programmi scolastici. Analogamente esistono i programmi di lavoro, i programmi di un'azienda, …. Si tratta di descrizioni più o meno dettagliate (e, a seconda dei casi, più o meno vincolanti) di eventi, comportamenti, azioni, … che si devono o si intendono svolgere

I programmi che regolano il funzionamento degli automatismi sono invece ferrei: gli automatismi devono comportarsi senza sbagli e senza improvvisazioni, mentre nel caso dei programmi che regolano le attività umane sono spesso permesse varianti, ripensamenti, spazi di autonomia, …

Val la pena di osservare che il carillon ha un *comportamento rigido*: produce sempre e solo la stessa musica. Per cambiare musica occorrerebbe cambiare il cilindro del carillon.

Variatore automatico e termostato hanno un comportamento più flessibile (infatti leggono dati provenienti dall'esterno). Tuttavia il loro comportamento è programmato in maniera fissa (hanno un programma incorporato).

L'automatismo che si ottiene accoppiando un termostato e un timer ha un livello di flessibilità maggiore in quanto è parzialmente programmabile dall'utente (questo automatismo legge dati e è regolato complessivamente da un programma di cui una parte è fissa e una parte è modificabile dall'utente).

9 Telefono, telecomando, calcolatrice tascabile, sportello di informazioni automatico, lavatrice: tutti operano utilizzando automatismi. Per ciascuno di essi sapete individuare l'eventuale presenza di dati che entrano, di programmi fissi e di programmi modificabili?

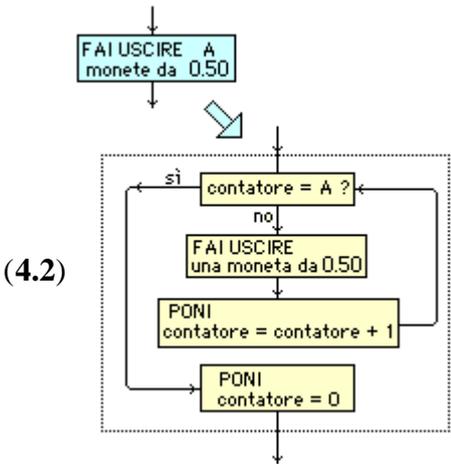
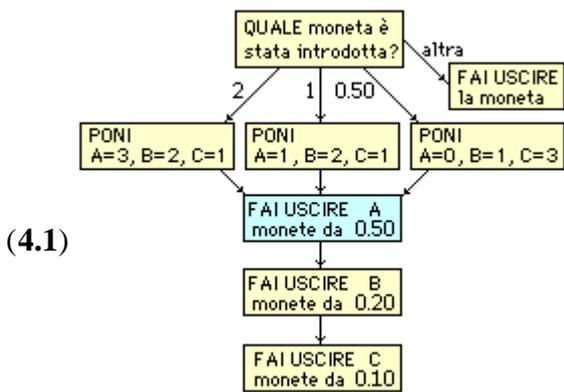
....

....

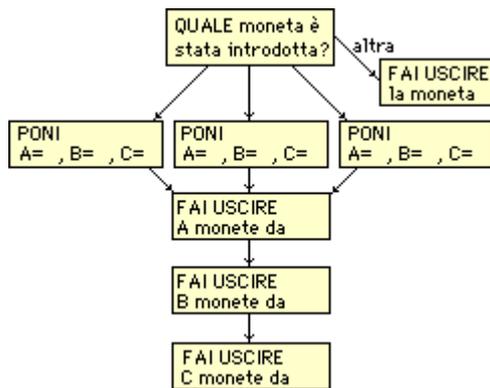
....

....

Consideriamo una macchina ***cambia-monete*** che operi nel modo seguente: se l'utente introduce una moneta da 2 € vengono restituite 3 monete da 50 centesimi, 2 da 20 e 1 da 10, se introduce una moneta da 1 € vengono restituite 1 moneta da 50 centesimi, 2 da 20 e 1 da 10, se introduce una moneta da 50 centesimi vengono restituite 1 moneta da 20 e 3 da 10.

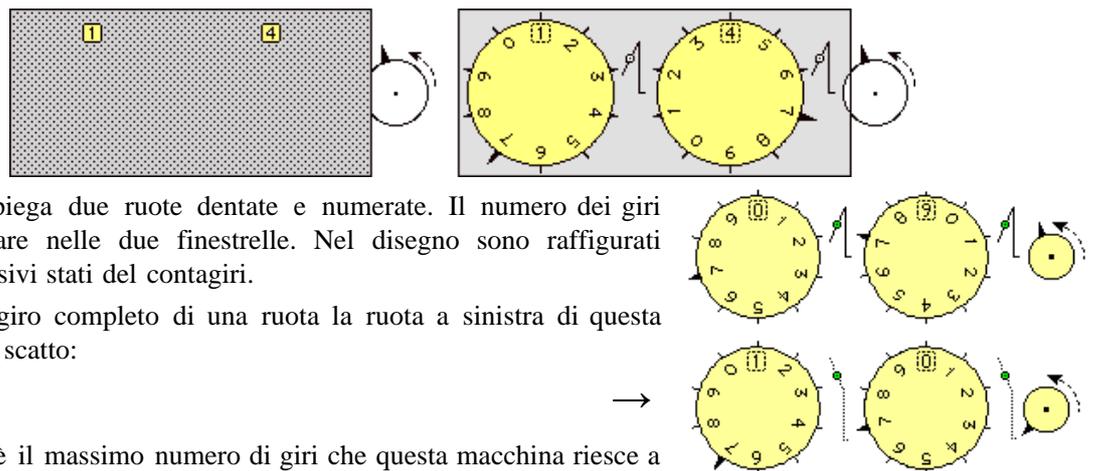
Il *diagramma (4.1)* schematizza il funzionamento di questa macchina. Il *diagramma (4.2)* dettaglia meglio il comportamento descritto da "fai uscire A monete da 0.50": man mano che scende una moneta un dispositivo "contatore" scatta in avanti di 1; quando è stata raggiunta la quantità prevista (risposta "sì") viene arrestato il flusso di monete e viene riazzerato il contatore.

La macchina cambia-monete è *programmabile*. Infatti il tipo della moneta introdotta viene individuato confrontandola con tre monete campione; cambiando le monete campione si modifica il comportamento che corrisponde al primo riquadro del diagramma. Inoltre possono essere modificati i valori con cui confrontare i contatori.

10 Completa il diagramma seguente in modo da descrivere il funzionamento della macchina nel caso sia impiegata in un paese in cui siano in circolazione solo monete da 1, 2, 5 e 10 (unità monetarie). Decidi prima quali monete far cambiare e in che modo.

Nota. *La distinzione tra dati e programmi non è sempre netta.*

Ad esempio nel caso del termostato la temperatura che viene selezionata dall'utente potrebbe essere considerata una informazione che modifica il programma (come i valori che abbiamo sostituito nel diagramma della macchina cambia-monete) e potrebbero essere considerate come dati solamente le temperature dell'acqua man mano rilevate. Nel caso del mangiacassette una cassetta introdotta può essere considerata sia una sequenza di dati che vengono elaborati dal programma incorporato nel mangiacassette e trasformati in forma sonora, sia un programma introdotto dall'utente per regolare (assieme al programma incorporato) la produzione di musica del mangiacassette.

In situazioni come queste il confine tra dati e programmi è una questione di punto di vista.

5. Scatole nere

Sotto sono raffigurati, in maniera schematica, l'aspetto esterno e ciò che è all'interno di un particolare *contagiri* (macchina che trasforma movimenti rotatori in informazioni sulla quantità di giri compiuti) nel momento in cui sta per essere compiuto il 15° giro.

Esso impiega due ruote dentate e numerate. Il numero dei giri compiuti appare nelle due finestrelle. Nel disegno sono raffigurati diversi successivi stati del contagiri.

Ad ogni giro completo di una ruota la ruota a sinistra di questa avanza di uno scatto:

→

11 Qual è il massimo numero di giri che questa macchina riesce a contare correttamente? Che cosa visualizza il contatore al compimento del 100° giro?

....

Abbiamo esplorato, anche se non in dettaglio, gli aspetti interni del funzionamento del termostato, del timer e, nel quesito precedente, del contagiri. Si tratta di dispositivi che vengono inseriti in macchine complesse per attivare/disattivare o regolare il funzionamento di alcune apparecchiature.

Nel seguito analizzeremo le funzioni di altri automatismi senza preoccuparci delle tecniche (meccaniche, magnetiche, elettriche, elettroniche, …) che essi impiegano internamente per trasformare gli stimoli esterni (cambiamenti di temperatura, rotazione delle ruote dell'automobile, …) in nuovi stimoli (accensione della caldaia, rotazione del contachilometri, …).

Considereremo questi automatismi come delle ***scatole nere***, cioè li considereremo come degli oggetti che trasformano cose che entrano in cose che escono senza preoccuparci di conoscere tutti i dettagli del processo attraverso cui avviene questa trasformazione.

Ci siamo già comportati così ad esempio di fronte alla macchina-da-gioco con cui abbiamo giocato a *Il castello stregato*: abbiamo cercato di capire come modifica il suo comportamento di fronte alle nostre scelte senza preoccuparci degli aspetti tecnici di come avviene la trasformazione delle informazioni che noi battiamo nelle informazioni che appaiono visualizzate sullo schermo. Analogamente, abbiamo descritto il funzionamento del variatore automatico di velocità e quello della macchina cambia-monete senza entrare nei dettagli tecnologici.

Facciamo ancora un esempio tratto dalla matematica. La *divisione intera* tra due numeri interi positivi M e N (cioè il calcolo del numero delle volte che N sta in M) può essere eseguita in più modi. Se conosco algoritmi per la addizione e la sottrazione posso:

(**a**) contare quante volte posso sottrarre N da M (*sottrazione ripetuta*)
quanto fa 1400/400? Posso sottrarre 400 1 volta (mi rimane 1000), anzi 2 (mi rimane 600), anzi 3 (mi rimane 200), ma non di più: il risultato è 3

oppure:

(**b**) contare quante volte devo, a partire da 0, addizionare N per arrivare a M o il più vicino possibile a M senza superarlo (*addizione ripetuta*)
quanto fa 1400/400? Posso prendere 400 1 volta (arrivo a 400), anzi 2 (arrivo a 800), anzi 3 (arrivo a 1200), ma non di più: il risultato è 3

L'operazione può essere schematizzata così: →

È la "macchina" che trasforma x e y in $x\backslash y$ (questo è il modo in cui, spesso, viene indicato il risultato della divisione intera, per distinguerlo dal valore esatto, non troncato agli interi, indicato con x/y).

In questo modo abbiamo descritto la relazione tra dati in ingresso e dati in uscita indipendentemente da come venga svolto il calcolo. La scatola nera potrebbe incorporare un programma che procede nel modo (a), nel modo (b) o in un altro modo.

Se vogliamo *solamente capire come possa funzionare una macchina come questa* basta che descriviamo un qualunque algoritmo di calcolo per la sottrazione.

In questo modo diamo una *interpretazione razionale* del possibile funzionamento della macchina. Infatti mettiamo in luce che per far uscire il valore di $x\backslash y$ la macchina (invece di nascondere al suo interno un piccolo *mago* che sa indovinare il risultato o un piccolo giapponesino che con abilissimi ragionamenti sa fare i calcoli in un attimo) può utilizzare un procedimento meccanico.

Passando dalla macchina-divisione ad automatismi di altro tipo, ci preoccuperemo di descrivere non più un algoritmo aritmetico ma, più in generale, un procedimento con cui dalle informazioni in ingresso si possa arrivare alle informazioni in uscita. Il procedimento dovrà consistere in una opportuna combinazione di elaborazioni elementari. Basta che sappiamo che queste elaborazioni elementari e il loro collegamento sono eseguibili da una macchina. Abbiamo già visto che vi sono macchine in grado di eseguire:

– *conteggi*: abbiamo visto come può essere realizzato un contagiri;

– *confronti* tra informazioni: abbiamo visto come un particolare timer confronta l'ora attuale con le ore fissate dall'utente (quando la levetta tocca la bandierina le due ore vengono a coincidere); analogamente un termostato può controllare la temperatura sulla base della dilatazione della sostanza impiegata dal termometro e un galleggiante può essere impiegato per controllare il livello di un liquido (vedi *figura* 5); questi dispositivi sono tutti esempi di *valvole di controllo*;

figura 5

– *scelte* tra modi alternativi in cui proseguire l'elaborazione, compiute sulla base dell'esito dei confronti realizzati: se la levetta incontra la bandierina viene cambiato stato all'interruttore (e si invia così alla caldaia l'ordine di accendersi o di spegnersi), quando la sostanza termometrica si dilata oltre una certa lunghezza può azionare l'interruttore facendogli cambiare stato, quando il galleggiante raggiunge la posizione fissata può interrompere l'ingresso del liquido, …

Abbiamo anche visto che le informazioni possono essere comunicate sia da ingranaggi, cinghie di trasmissione, tubi che conducono liquidi, … che da *segnali elettrici*.

Ad esempio il galleggiante della figura 5 invece di chiudere direttamente l'apertura del tubo facendo leva sul perno potrebbe azionare un interruttore che comandi la chiusura di un rubinetto azionato elettricamente (vedi *figura* 6).

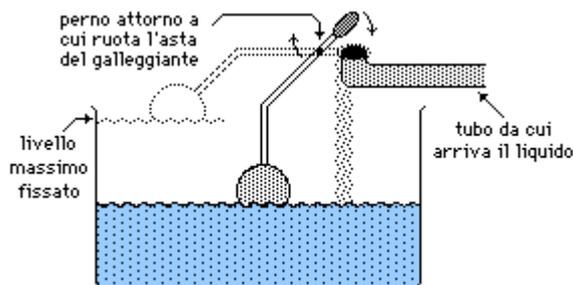
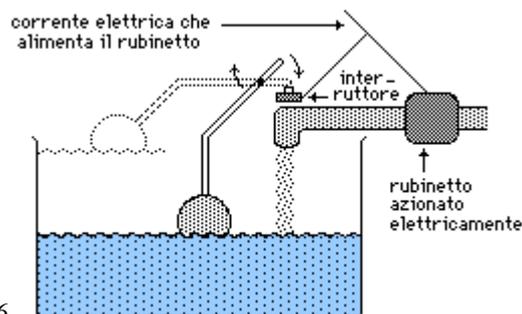



figura 6

Analogamente nel caso del contagiri potremmo fare a meno degli ingranaggi che collegano le ruote. Potremmo semplicemente far sì che ogni volta che una ruota completa un giro venga attivato con un interruttore un dispositivo elettrico che faccia scattare di una posizione in avanti la ruota posta a sinistra.

I *contatori automatici* sono automatismi del tutto analoghi ai contagiri ma che permettono di contare cose diverse dai giri: basta che al posto della ruota più a destra (quella di cui il contagiri conta i giri) mettiamo un dispositivo elettrico che faccia avanzare la ruota alla sua sinistra ogni volta che viene attivato da un particolare stimolo esterno. Ad esempio si possono contare le monete da 0.50 € che vengono introdotte in un distributore automatico se un'opportuna apparecchiatura invia a tale dispositivo un segnale elettrico ogni volta che riconosce come una moneta da 0.50 € l'oggetto che è entrato dalla fessura.

Per dare un'idea concreta di come possono essere connessi automatismi elementari in modo da ottenere automatismi più complessi torniamo alla *macchina-divisione*. Supponiamo che la macchina proceda per addizioni ripetute.

Potrebbe allora impiegare un contatore automatico per contare le addizioni, una valvola di controllo per arrestare l'esecuzione e un automatismo in grado di fare le addizioni.
A sua volta quest'ultimo automatismo (cioè una macchina-addizione) potrebbe essere realizzato con contatori e valvole di controllo.

12 Quanti contatori e quante valvole di controllo impieghereste per realizzare una macchina-addizione?

....

6. Logica di funzionamento e diagrammi di flusso

Abbiamo impiegato dei particolari diagrammi per descrivere il funzionamento della macchina-da-gioco e della macchina cambia-monete.
Come abbiamo già ricordato, questi diagrammi non descrivono esattamente il funzionamento della macchina considerata, ma lo schematizzano cercando di mettere in luce quale potrebbe essere l'organizzazione complessiva della macchina, i collegamenti e i passaggi di informazioni (segnali elettrici, azionamenti di leve, …) tra i vari dispositivi, ….
Diremo che ciò che si cerca di descrivere non è tanto il funzionamento quanto la ***logica di funzionamento*** della macchina.

Analogamente quando parliamo della *logica* di un certo avvenimento non intendiamo riferirci alla sequenza particolareggiata dei fatti attraverso cui esso si è svolto , ma al "filo logico", cioè ai fattori, alle condizioni, ai collegamenti di vario tipo che hanno determinato il susseguirsi degli eventi.
Questi diagrammi sono costituiti da riquadri che rappresentano le singole attività che deve svolgere la macchina e da frecce che li collegano indicando l'ordine di esecuzione. Paragonando il comportamento della macchina al flusso di un fiume che tocca diverse località o al flusso del traffico che si snoda attraverso un particolare itinerario, possiamo dire che il diagramma rappresenta il flusso dell'attività della macchina.
Per questo motivo questi diagrammi vengono chiamati ***diagrammi di flusso***.

Vediamo un altro esempio. Un particolare modello di ***lavastoviglie*** prevede tre programmi di lavaggio (1, 2, 3), selezionabili con una manopola.

La lavastoviglie, quando viene accesa, esegue il lavaggio secondo il programma selezionato dalla manopola. Se è selezionato il numero 0 la lavastoviglie non compie alcuna azione.

La *tabella (6.1)* seguente descrive il tipo di lavaggio effettuato nei tre casi.

La lavastoviglie è dotata anche di un tasto **T** che, se premuto, riduce la temperatura di riscaldamento dell'acqua da 65° a 55°.

Inoltre è dotata di un tasto **A** che, premuto, esclude la asciugatura.

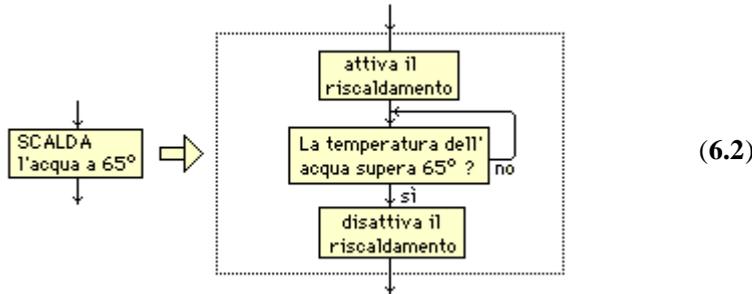
Il funzionamento di questa particolare lavastoviglie è descritto dal *diagramma (6.2).*

Alla fine del lavaggio la lavastoviglie riposiziona la manopola su 0 e rimane in attesa che venga selezionato un nuovo programma: il primo riquadro continua ad essere riattraversato fino a che non viene selezionato un numero diverso o fino a che non viene premuto l'interruttore arrestando l'alimentazione elettrica della lavastoviglie.

(**6.1**)	**1**	**2**	**3**
prelavaggio con acqua fredda	•	-	-
lavaggio con acqua calda	•	•	-
risciacquo con acqua fredda	•	•	•
risciacquo con acqua calda	•	•	-
asciugatura con aria calda	•	•	-

13 Il diagramma di flusso non è completo: manca la destinazione di due frecce e vi sono due test da completare (vedi le finestrelle punteggiate). Completa il diagramma in modo che sia in accordo con la tabella precedente.

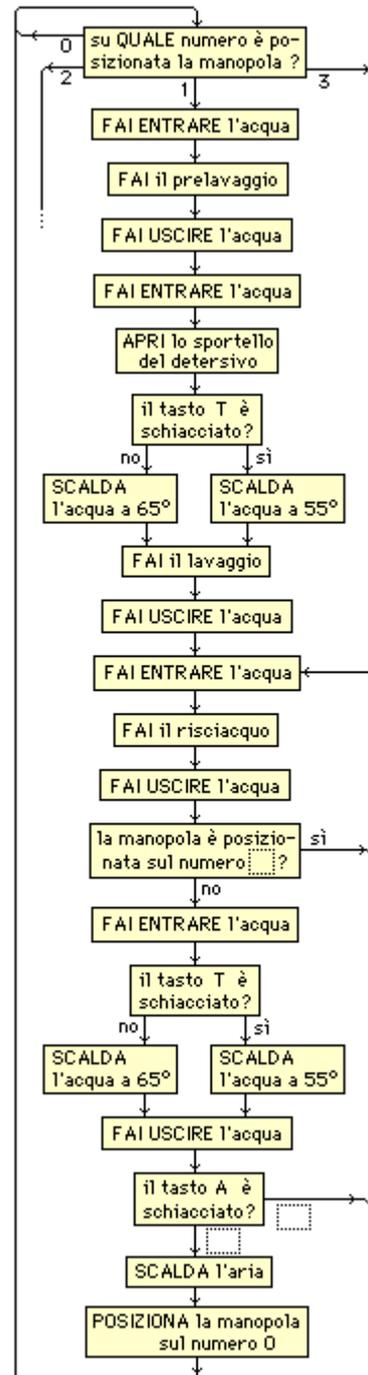
Come nel caso della macchina cambia-monete (quando abbiamo descritto più in dettaglio il riquadro "fai uscire A monete da 0.50 €") possiamo analizzare più a fondo il funzionamento della "scatola nera" lavastoviglie cercando di descrivere la logica di funzionamento della "sotto-scatola nera" che regola il riscaldamento dell'acqua. Ecco una possibile rappresentazione:

(6.2)

14 Descrivi con un diagramma di flusso il riquadro "FAI ENTRARE L'ACQUA".

I digrammi di flusso possono essere impiegati, anche per descrivere il comportamento che deve tenere una persona in certe circostanze. Ad esempio nell'opuscolo delle ***istruzioni per l'uso*** di un particolare orologio da polso nel capitolo *Messa a punto dell'ora e del calendario* si trovano l'illustrazione seguente e il *diagramma (6.3)*.

Il diagramma è seguito dalla nota: «IMPORTANTE. *La sequenza precedente deve essere rigorosamente seguita per ogni nuova messa a punto*».

I diagrammi di flusso sono usati in particolare quando si vuole indicare una sequenza di azioni che deve essere seguita rigorosamente. Al posto dei diagrammi di flusso sono usate più spesso delle ***istruzioni numerate***. Ad esempio al posto del diagramma (6.3) si potrebbe trovare la seguente sequenza:

1. Se sul quadrante appare la data premere il pulsante **A**.
2. Premere il pulsante **B**.
3. Per correggere i secondi premere **A** al segnale orario.
4. Premere **C**.
5. Se si vogliono regolare le ore, premere ripetutamente **A** fino a ottenere il numero voluto.
6. Premere **C**.
7. Se si vogliono regolare i minuti, premere ripetutamente **A** fino a ottenere il numero voluto.
8. Premere **C**.
9. Se si vuole regolare il mese, premere ripetutamente **A** fino a ottenere il numero voluto.
10. Premere **C**.
11. Se si vuole regolare il giorno, premere ripetutamente **A** fino a ottenere il numero voluto.
12. Premere **B**.

Istruzioni numerate e diagrammi di flusso possono essere impiegati per rappresentare non solo comportamenti che *si devono* tenere, ma anche ***strategie*** con cui si può affrontare un problema.

Consideriamo un esempio molto semplice: il gioco ***Indovina numero***.

Un giocatore A pensa e scrive su un foglio un numero intero che può andare da 0 a 100. Un altro giocatore B tenta di indovinare il numero.

Ad ogni tentativo A deve dire a B se ha indovinato il numero (e in tal caso la partita è finita), se l'ha superato o se è rimasto al di sotto.

Nelle partita successiva A e B invertono i ruoli. E così via. Alla fine vince chi ha fatto complessivamente meno tentativi a vuoto.

Le istruzioni numerate seguenti rappresentano la strategia più elementare che si può seguire (abbiamo indicato con X il numero da indovinare):

1. Devo cercare un numero compreso tra N1 e N2. N1 è 0 e N2 è 100.
2. Dico un numero N compreso tra N1 e N2.
3. Se X = N la partita è finita.
4. Se X > N restringo la zona di ricerca a destra di N, cioè prendo N come nuovo N1, altrimenti restringo la ricerca a sinistra di N, cioè prendo N come nuovo N2.
5. Ripeto a partire dall'istruzione 2.

B 10:08 A
C

(6.3)

Sul quadrante è mostrata l'ora o il calendario? — cal. → Premi A
ora → Premi B
Vuoi azzerare i secondi? — sì → Premi A
no → Premi C
Il numero delle ore è giusto? — no → Premi A
sì → Premi C
Il numero dei minuti è giusto? — no → Premi A
sì → Premi C
Il numero dei mesi è giusto? — no → Premi A
sì → Premi C
Il numero dei giorni è giusto? — no → Premi A
sì → Premi B

L'idea è quella di far tesoro degli insuccessi: se X è maggiore del numero che ho detto è inutile che nei successivi tentativi dica numeri più piccoli; analogamente se X è minore del numero che ho detto è inutile poi tentare con numeri più grandi.

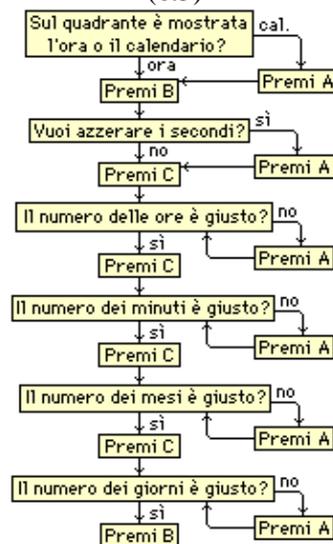
15 Provate a trovare una strategia più efficiente, che non si limiti a prendere un numero qualunque compreso tra N1 e N2. Discutetene in classe e poi rappresentatela sotto forma di istruzioni numerate o di diagramma di flusso.

7. Segnali e codici

Il telefono modifica la ***forma*** delle informazioni, non il loro ***significato***: trasforma i suoni in segnali elettrici che poi possono essere ritrasformati in suoni. Invece la calcolatrice trasforma informazioni in informazioni con un nuovo significato. Ad esempio battendo 16 + 9 sul visore ottengo 25, che è un'informazione del tutto nuova: da 25 non sono in grado di risalire ai numeri che ho battuto come addendi (potrei aver battuto 20 e 5, o 11 e 14, o …). Ma, *che cos'è il significato di un'informazione*?

Un'informazione viene comunicata attraverso un repertorio di ***segnali***. Ad es. parlando con una persona le comunichiamo informazioni su nostre idee, su fatti accaduti, su nostre emozioni, … attraverso parole, tono della voce, gesti delle mani, sguardi, atteggiamenti del volto o di altre parti del corpo, …. Tutti questi segnali che lanciamo vengono recepiti e interpretati dal nostro interlocutore in base alle ***convenzioni*** acquisite attraverso l'esperienza, l'educazione scolastica, … . Mentre la comunicazione attraverso segnali verbali è capita solo da un interlocutore che parli la nostra lingua, gli altri segnali sono regolati da convenzioni spesso valide per tutte nazionalità: l'agitazione di una mano aperta viene quasi ovunque interpretata come un saluto, il verso «mmm…» come indice di dubbio o di perplessità, …

Un insieme di segnali e delle relative convenzioni (che danno significato alle informazioni che con essi si comunicano) viene detto ***codice***. Ad esempio i colori *rosso*, *giallo* e *verde* e la convenzione per cui i tre colori significano, rispettivamente, «non si può passare», «sta per venire rosso», «si può passare» costituiscono il codice dei semafori.

Il codice del *linguaggio naturale* non è sempre facilmente interpretabile. Ad es. di fronte alle frasi «l'accusa di Luigi è ingiusta» e «la guida di Maria mi sarà di grande aiuto» non si riesce a capire senza ulteriori informazioni se Luigi è l'accusato o l'accusatore e se con "guida" ci si riferisce a un opuscolo turistico prestato da Maria o alla presenza di Maria in persona. La presenza di frasi come queste rende difficile spesso sia la comprensione che la traduzione in un altro codice, e in particolare in una lingua straniera (ad es. "guida" in inglese viene tradotta diversamente quando rappresenta un opuscolo-guida e quando rappresenta la guida da parte di una persona). Nel caso del *codice gestuale* non è possibile neanche precisare quali sono i segnali che si usano: spesso si inventano spontaneamente dei gesti e l'interlocutore, nonostante non li avesse mai visti, in genere riesce a comprenderli.

In ogni caso spesso l'interpretazione è *soggettiva*: alla frase di una persona interlocutori che hanno una diversa conoscenza della persona o del suo ambiente possono dare significati differenti.

Se restringiamo la nostra attenzione a informazioni comunicabili ed elaborabili mediante macchine, non possiamo utilizzare convenzioni soggettive ma dobbiamo trovare un modo meccanico per assegnare "significati" ai segnali. Vediamo come ciò sia realizzabile. Fissiamo un sistema di segnali come sistema di riferimento, ad esempio, quello dei *segnali alfanumerici*, cioè i segnali costruiti con lettere, cifre, segni di interpunzione, … (in altre parole si tratta dei segnali realizzabili con una macchina da scrivere).

Allora possiamo definire come "significato" di un messaggio in *alfabeto Morse* (vedi *figura 7*) la sua traduzione con gli usuali caratteri di stampa.

Più in generale, se fissiamo come riferimento i segnali alfanumerici, possiamo dire che un ***codice*** consiste in un *repertorio di segnali S e* nelle *regole per tradurre in S* le informazioni espresse in forma alfanumerica.

L'operazione con cui viene effettuata questa traduzione viene chiamata ***codificazione*** (o *codifica*).

L'operazione opposta, cioè l'operazione per passare da un sistema di segnali *S* al sistema preso come riferimento (nel nostro caso il sistema alfanumerico), viene chiamata ***decodifica***.

simboli alfa-numerici	codice Morse
A	· –
B	– · · ·
C	– · – ·
…	
?	· · – – · ·
(	– · – – · –
…	
7	– – · · ·
=	– · · · –
…	

figura 7

Il ***significato*** di un'informazione (in questo ambito più ristretto rispetto al linguaggio naturale) è dunque la forma che essa assume nel sistema di riferimento, cioè la forma che assume con la decodifica. Ad esempio codificando ACAB in codice Morse otteniamo la sequenza di segnali: · –   – · – ·   · –   – · · ·
Viceversa la decodifica di: · –   – · – ·   – · – ·   · – dà: ACCA; questo è il significato di:
· –   – · – ·   – · – ·   · –

Spesso si usa la parola "codice" anche per indicare il risultato della codificazione; ad esempio si usa dire "il codice a barre di un prodotto" o "il codice fiscale di una persona", mentre, in senso stretto, il codice a barre è il procedimento che trasforma numeri in barre e il codice fiscale è il procedimento che trasforma una sequenza di nomi, date, … in una nuova sequenza di simboli alfanumerici.

16 Nella *tabella (7.1)*, accanto alla scrittura decimale dei numeri, sono riportate parzialmente due codifiche che utilizzano espressioni costruite con il simbolo "|" e una codifica che utilizza come simboli lettere.

Per ogni codifica cerca di individuare il procedimento più semplice possibile con cui ti sembra sia stata generata la scrittura dei numeri inferiori a 12 e utilizzalo per rappresentare i numeri successivi, fino a 15.

(7.1)

I segnali alfanumerici e i segnali morse e in generale i segnali che hanno la forma di espressioni (cioè di sequenze di simboli) costruite mediante un fissato insieme finito di simboli, vengono detti ***segnali digitali***. Il termine deriva dalla parola inglese *digit* che significa "cifra" (significa anche "dito" e non è un caso: le dita delle mani molto probabilmente hanno costituito il primo codice impiegato dagli uomini per rappresentare i numeri). Hanno avuto particolare importanza nello sviluppo delle comunicazioni i ***segnali elettrici***.

Fino a metà dell'Ottocento i messaggi su lunga distanza, oltre ad essere recapitati da messaggeri, potevano essere comunicati solo con il suono (tamtam, messaggi urlati e passati da persona a persona, …) o con le immagini (messaggi di fumo, segnalazioni con falò, con bandiere, …). Ma sia le onde sonore che i raggi di luce necessitavano di molti passaggi intermedi per essere comunicati a grandi distanze.

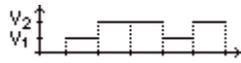
Inoltre, mentre il suono aveva lo svantaggio di viaggiare abbastanza lento (il tuono viene percepito dopo il lampo: in un secondo il suono percorre 300 m, contro i 300000 km della luce), la luce aveva lo svantaggio di propagarsi solo in linea retta, senza aggirare gli ostacoli come poteva fare il suono.

L'elettricità permise di superare queste difficoltà: una variazione di tensione elettrica può essere comunicata attraverso i cavi velocemente come un raggio visivo e lungo un qualunque percorso.

Le prime applicazioni alle telecomunicazioni (*telecomunicazione* significa "comunicazione a distanza": in greco *tele* significa "a distanza") furono la trasmissione di segnali in codice Morse: il *telegrafo*. Successivamente l'elettricità venne impiegata per trasmettere anche i suoni: il *telefono*.

Nel primo caso (codice Morse) si tratta si segnali di tipo digitale, nel secondo (suoni) di segnali che non possono essere espressi direttamente mediante un insieme finito di simboli.

Soffermiamoci sui *segnali digitali* e vediamo *come possono assumere la forma di segnali elettrici*. Sugli altri tipi di segnali (suoni, immagini, …) ci soffermeremo in un'altra unità didattica.

Consideriamo i segnali digitali costituiti dalle espressioni in cifre decimali dei numeri interi. Se fissiamo 10 tensioni elettriche diverse e un intervallo di tempo (ad esempio 1 ms, cioè un millisecondo) possiamo trasformare direttamente il numero 146 nel segnale elettrico costituito per 1 ms dalla prima tra le tensioni fissate, per un altro ms dalla quarta tensione e per un ultimo ms dalla sesta tensione.

Se fissiamo due tensioni V1 e V2 convenendo che V1 rappresenti il punto e V2 la linea, il segnale elettrico raffigurato a fianco rappresenta il segnale Morse · – – · –

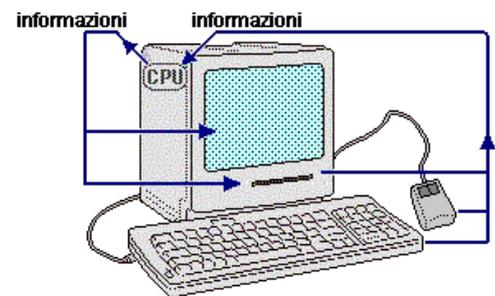
8. Il calcolatore

Una tipica macchina che opera ricevendo e producendo segnali digitali è il ***calcolatore***. Nella *figura 8* è disegnato un *personal computer* (calcolatore d'uso personale, cioè impiegabile da un solo utente). Esso è dotato al suo interno di un automatismo chiamato *unità centrale di elaborazione* (usualmente indicata con la sigla *CPU*: la P della sigla deriva dal fatto che in inglese l'elaborazione di dati viene chiamata *processing*) che elabora le informazioni che gli arrivano sotto forma di segnali elettrici digitali da:

- la *tastiera* (come traduzione dei caratteri battuti),
- *dischi magnetici*, estraibili o fissi (come traduzione di segnali magnetici registrati)
- o da altri dispositivi (da un *mouse*, come traduzione di messaggi selezionati sullo schermo, da cavi collegati più o meno direttamente ad altri computer, …).

figura 8

Le nuove informazioni che escono sotto forma di segnali elettrici digitali dalla CPU sono poi trasformate:

- in informazioni alfanumeriche che appaiono sullo *schermo*,
- o in segnali magnetici registrati su disco,
- o …

Non ci preoccupiamo, per adesso, dei modi in cui le informazioni vengono codificate e rappresentate elettricamente. L'esempio visto alla fine del paragrafo precedente ci dà comunque un'idea di come ciò possa essere realizzato con una corrente elettrica che cambi tensione a scatti.

Analogamente in un disco magnetico le informazioni digitali vengono rappresentate attraverso il susseguirsi, lungo i solchi, di zone con diversi livelli di magnetizzazione. Da alcuni anni sono impiegati anche i ***CD***; in una successiva scheda si vedrà come questi rappresentano le informazioni.

I calcolatori ai nostri giorni sono in genere dotati anche di dispositivi per generare suoni (a partire da loro registrazioni in forma digitale), per ricevere immagini da una TV, ….

I calcolatori sono macchine dotate di programmi incorporati (nella CPU) e in grado di ricevere ed eseguire programmi forniti dagli utenti (attraverso cd, via cavo, …). I programmi incorporati sono usati dal calcolatore per eseguire le operazioni di base (conteggi e operazioni aritmetiche elementari, codifiche e decodifiche, confronti tra segnali, …) seguendo un ordine che dipende dai programmi e dai dati forniti dall'esterno. Considerando i calcolatori con ***dati*** e ***programmi*** si intendono sempre informazioni di tipo digitale.

In gran parte degli impieghi vengono elaborati dati di tipo numerico. Anche quando i dati sono più in generale di tipo alfanumerico il calcolatore li codifica sempre in forma numerica e li elabora utilizzando algoritmi (cioè procedimenti di calcolo). Tutto ciò dovrebbe farvi comprendere l'importanza che ha la ***matematica*** nella comprensione del funzionamento e nella padronanza dell'uso di un calcolatore. Nel corso di questo e del prossimo anno vedremo quanta e quale matematica stia dietro alle "capacità" di un calcolatore.

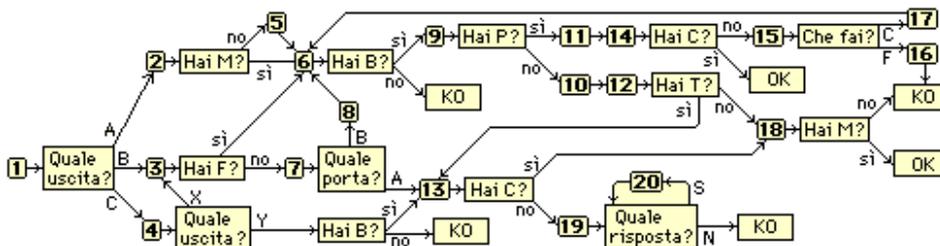
L'importanza assunta dall'***informatica***, cioè dallo studio dei principi che regolano il funzionamento e l'uso dei calcolatori ("informatica" deriva da "trattamento *automatico* delle *informazioni*"), dipende:

– sia dal ruolo insostituibile che il calcolatore ha assunto in tutte le attività per quanto riguarda *la archiviazione e la ricerca di informazioni* (si pensi all'anagrafe, alla gestione delle scorte e degli acquisti nei magazzini, nelle farmacie, …)

– sia dal fatto che *gran parte delle macchine che ci circondano funzionano collegate a calcolatori o sono dotate al loro interno di piccoli calcolatori*, cioè di una CPU e di dispositivi per introdurre programmi.

All'origine di questo secondo fenomeno vi è la possibilità di sostituire collegamenti meccanici tra le componenti di una macchina (ingranaggi, leve, …) con collegamenti di tipo elettrico governati da programmi. Ciò, oltre a consentire di ridurre i costi (i dispositivi elettronici oggi costano molto poco), consente di modificare il comportamento di una macchina cambiando i programmi senza sostituire o limitando la sostituzione delle parti meccaniche. Si pensi ad esempio alla verniciatura delle automobili o al montaggio di pezzi di carrozzeria: un tempo per ogni tipo di automobile occorrevano dei macchinari ad hoc, oggi vengono utilizzati dei macchinari programmabili, per cui se l'azienda decide di cambiare modello può, senza grosse spese e in tempi rapidi, limitarsi a modificare i programmi.

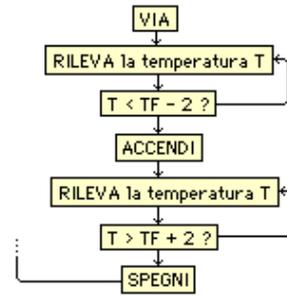
9. Esercizi

e1 Qui sotto è raffigurato il diagramma del q. 1, ma in parte *modificato* (sono state invertite le risposte a una domanda). Trova quali sono i casi in cui si conclude positivamente l'avventura se la macchina-da-gioco viene programmata in modo da seguire questo diagramma (ricorda che all'inizio per scegliere la porta A occorre avere la tuta, per scegliere B occorre il bancomat, per scegliere C occorre il faretto).

e2 Il diagramma di flusso a lato illustra il funzionamento di un termostato applicato a una caldaia.

TF è la temperatura (in gradi centigradi) fissata dall'utente.

T è la temperatura man mano rilevata dal termostato.

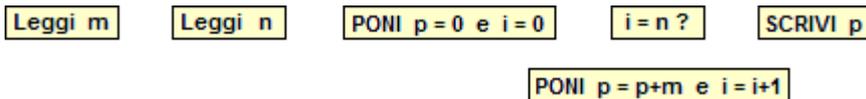
Il termostato è predisposto per una tolleranza di 2° (cioè accende la caldaia quando T dista al più di 2 gradi da TF).

Completa il diagramma mettendo "sì" o "no" a fianco delle frecce uscenti dai riquadri di test e indicando la destinazione della freccia che esce da "SPEGNI". Il riquadro "VIA" rappresenta l'accensione del termostato. I riquadri "ACCENDI" e "SPEGNI" rappresentano accensione e spegnimento della caldaia.

e3 Le istruzioni numerate seguenti rappresentano un procedimento di calcolo che ai numeri in ingresso *m* e *n* (dove *n* è un numero intero non negativo) fa corrispondere in uscita un numero *p*.

1 LEGGI m
2 LEGGI n
3 PONI p=0 e i=0
4 SE i=n VAI al passo 7
5 PONI p=p+m e i=i+1
6 VAI al passo 4
7 SCRIVI p

Questo procedimento corrisponde a un'operazione aritmetica a te nota? Per rispondere prova a seguire queste istruzioni per i seguenti valori di *m* e di *n*:

m	*n*	*p*
5	0	…
5	1	…
5	2	…

Completa, poi, il seguente diagramma in modo che rappresenti la stessa operazione.

1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini:
macchina semplice (§3), *motore* (§3), *automatismo* (§3), *dati* e *programma* (dopo ques.8), *diagramma di flusso* (§6), *codice* (§7), *codifica* e *decodifica* (§7), *segnali digitali* (§7).

2) Su un foglio da "quadernone", nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").

Le statistiche

Alcuni modelli per la rappresentazione dei dati

Scheda **2**

I record

0. Introduzione

Nella scheda 1 abbiamo considerato alcuni *modelli* matematici usati nelle statistiche.

Abbiamo visto come con rappresentazioni grafiche e numeriche si possa facilitare il confronto tra dati diversi, tra le parti che compongono un totale, tra una parte e il totale, … , ma anche come, in cambio, si possano perdere altre informazioni.

Consideriamo ad esempio l'incidenza della carne bovina sul totale della carne consumata pro-capite. Impiegando *rappresentazioni percentuali* possiamo dire che in 60 anni (dal 1926 al 1985) è passata dal 47% al 32%. A prima vista si potrebbe concludere che è diminuito il consumo di carne bovina, ma ciò non è vero: si è passati dal consumo pro-capite di 10.1 kg all'anno a quello di 25.1 kg all'anno (cioè, dividendo per 365, da 28 a 70 grammi al giorno).

Infatti se la *parte percentuale* diminuisce ma, nel frattempo, aumenta il *totale*, il *dato* può comunque aumentare. [➨ voce "rapporto" de *Gli oggetti matematici*]

Abbiamo anche visto che dalla conoscenza del *totale* e della *parte percentuale* non si può ritrovare il valore esatto del *dato*. Infatti le percentuali vengono arrotondate con valori approssimati. [➨ voce "approssimazioni" de *Gli oggetti matematici*]

Per le statistiche valgono le osservazioni che abbiamo fatto più in generale per i modelli matematici: l'uso della matematica per analizzare un problema non basta per garantire l'esattezza dell'analisi poiché nel rappresentare una situazione con un modello matematico si scelgono solo alcuni aspetti tralasciandone altri, e anche gli aspetti presi in considerazione sono spesso rappresentati approssimativamente. [➨ voce "modello" de *Gli oggetti matematici*]

Abbiamo fatto queste osservazioni anche a proposito dei *valori medi*. Ad esempio il voto medio di matematica alla fine dell'anno in una classe può essere 6 e 1/2, ma è ben diversa la situazione in cui quasi tutti gli alunni abbiano 6 o 7 da quella in cui vi siano anche molti 4, 5 e 8.

In ***questa scheda*** discuteremo altri strumenti matematici impiegati nelle statistiche. Come argomento per le nostre esemplificazioni prenderemo i ***record sportivi***.

1. Il salto in alto - I grafici

In *figura 1* sono rappresentati graficamente i record di ***salto in alto*** *maschile* e gli anni in cui essi sono stati stabiliti (a partire dal 1912, anno in cui si sono svolte le Olimpiadi di Stoccolma).

I punti che rappresentano i vari record non si distinguono molto bene. Per ottenere una rappresentazione più leggibile possiamo far passare l'asse orizzontale invece che per il punto dell'asse verticale che rappresenta 0 cm per quello che rappresenta una quota maggiore, ad esempio 198 cm (il primo record registrato è di 200 cm). Possiamo così dilatare il grafico verticalmente e ottenere la *figura 2*.

1 Nel 1934 è stato stabilito un record? Se sì, quale? E nel 1960?

1934 .... 1960 ....

2 Qual era il record in vigore nel 1920? ....

3 Segna in figura 2 in corrispondenza degli anni 1917, 1919 e 1922 i punti che rappresentano i record in vigore in tali anni.

Nelle *figure 3* e *4* sono riportati due possibili "completamenti" del grafico di figura 2.

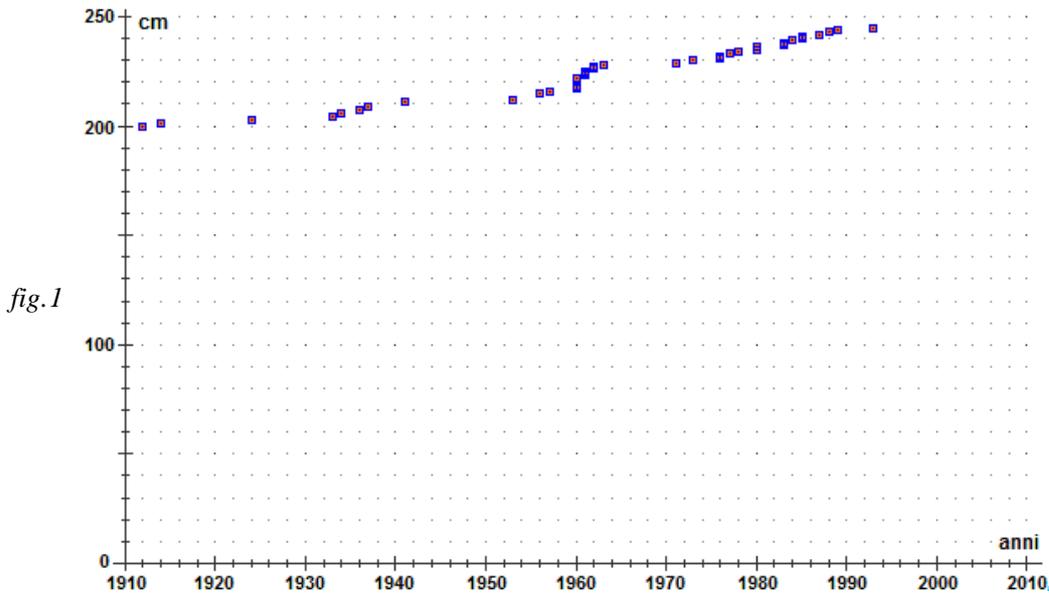



fig.1

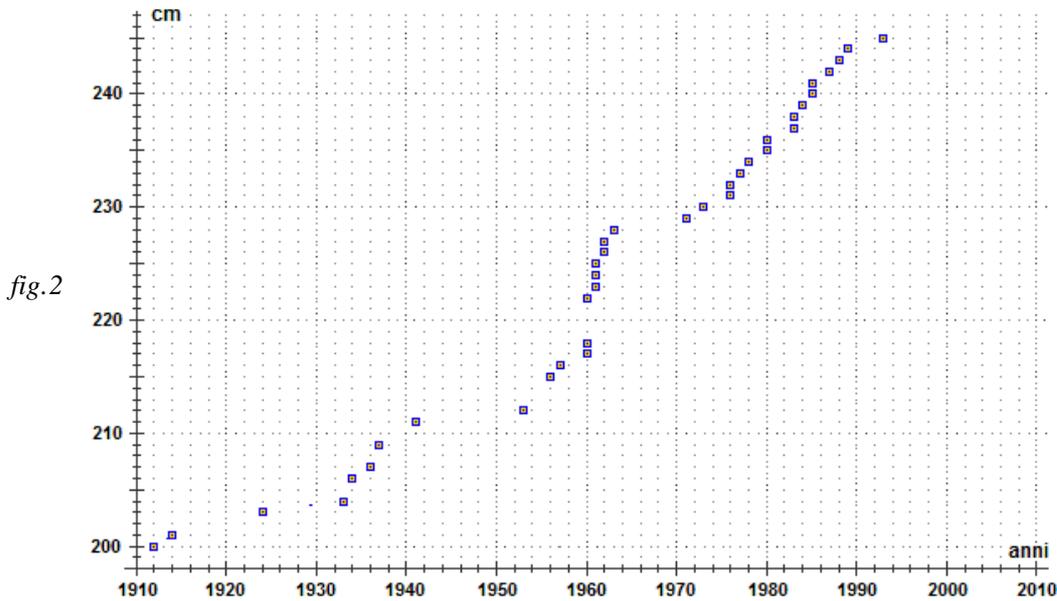



fig.2

4 Quale dei due grafici rappresenta per ogni anno qual era il record in vigore? ....

La rappresentazione in figura 4 evidenzia meglio l'evoluzione dei risultati della specialità del salto in alto, ma i segmenti con cui sono stati congiunti i punti che rappresentano i record man mano stabiliti sono fittizi. La rappresentazione di figura 3 evidenzia meglio la durata dei vari record e permette di trovare per ogni anno il record in vigore. La durata dei record non è comunque rappresentata del tutto fedelmente: abbiamo considerato gli anni in cui i record sono stati stabiliti, non le date esatte.

Le rappresentazioni nelle figure 1-4 vengono tutte chiamate ***grafici***. A volte la parola "grafico" viene usata come sinonimo di "diagramma", cioè di "rappresentazione grafica". Più spesso viene usata per indicare un particolare tipo di diagramma impiegato per rappresentare la *relazione che intercorre tra i valori numerici di due grandezze*. Abbiamo già rappresentato, per es., la relazione tra percorrenza e tariffa ferroviaria, tra tempo trascorso e posizione del treno lungo la linea ferroviaria [➡ LMSM-2], tra dato assoluto e percentuale [➡ LS-1] e, ora, tra anno di conseguimento e valore del record:

- le grandezze sono state rappresentate su due ***assi di riferimento***, cioè due rette non parallele (in genere perpendicolari) ai cui punti sono stati associati i valori delle grandezze mediante una opportuna *scala numerica*; nel caso dei record:

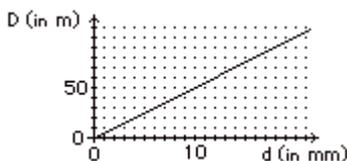
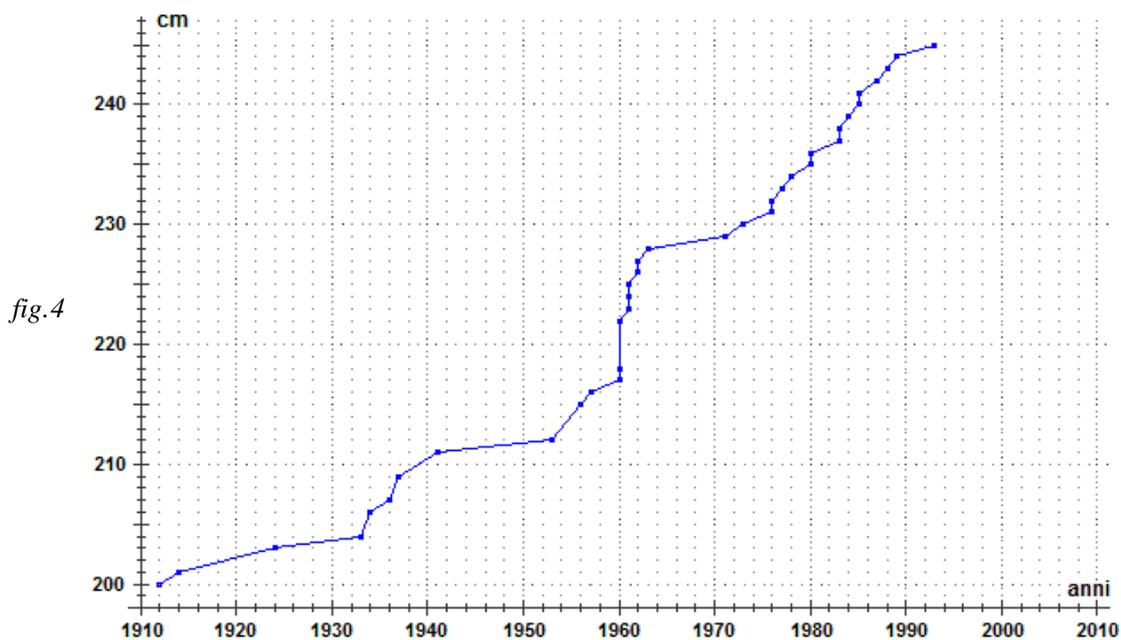
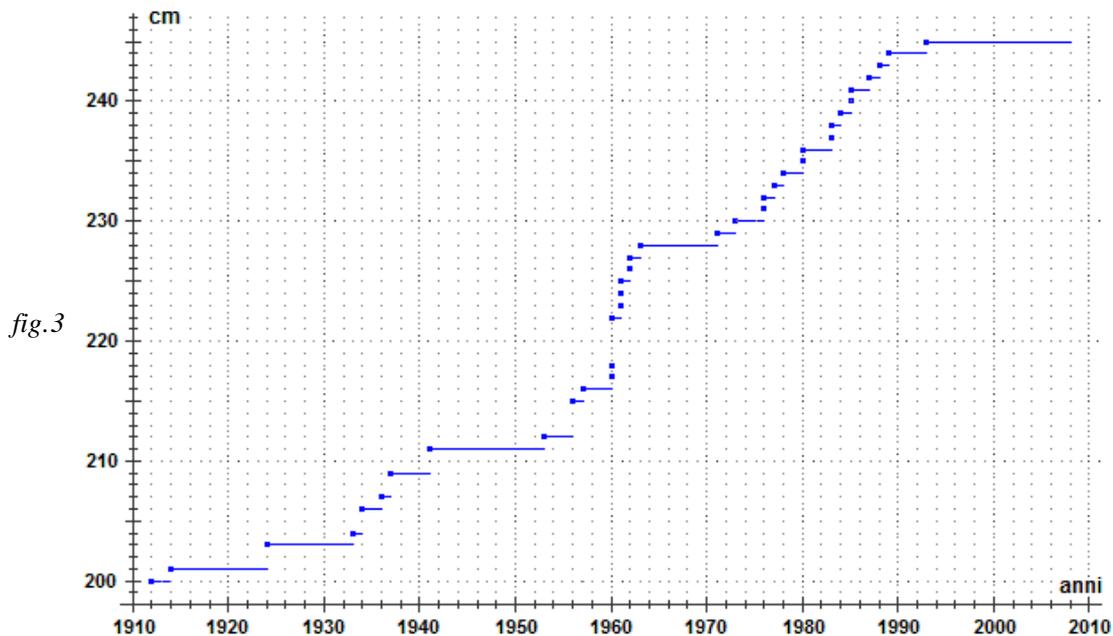
  – si è fissato un punto a cui è stato associato un dato valore (ad es.un punto a cui è stato associato 1910),

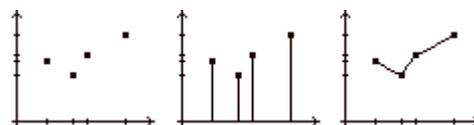
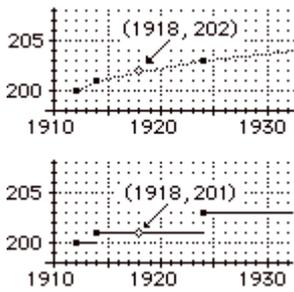
  – si è fissato un segmento a cui è stato associato un altro valore (ad es. al segmento tra due tacche è stato associato 1 anno)

  – e, scelto un verso (punta della freccia), con questa "unità di misura" si sono rappresentati gli altri valori;

- e ogni coppia di dati uno in relazione con l'altro è stata rappresentata con un ***punto***:
  – se *dato1* è il valore di una grandezza e *dato2* è il corrispondente valore dell'altra, a partire dal punto che su un asse rappresenta *dato1* si traccia una retta parallela all'altro asse; lo stesso si fa per *dato2*;
  – l'intersezione delle due rette è il *punto* che rappresenta il fatto che *dato1* è in relazione con *dato2*;
  – i valori *dato1* e *dato2* vengono detti ***coordinate*** del *punto*; il *punto* viene designato anche con (*dato1*,*dato2*); *dato1* e *dato2* vengono detti, rispettivamente, ***ascissa*** e ***ordinata*** del *punto*.

fig.3

fig.4

In alcuni casi si ottengono grafici che "coprono" interamente l'intervallo numerico rappresentato sull'asse orizzontale, come nella figura a fianco (le ascisse sono le distanze *d* su una cartina in scala 1:5000, le ordinate sono le corrispondenti distanze *D* nella realtà).

Nei casi in cui si ottengono punti isolati, come ad esempio nel caso di figura 2, per facilitare la lettura del grafico, invece dei soli punti si possono tracciare dei segmenti verticali (si ottiene così un nuovo tipo di istogramma) o dei segmenti che congiungono un punto all'altro (come in figura 4).

Ma i punti dei segmenti così tracciati non rappresentano un'effettiva associazione tra le due grandezze considerate. Ad esempio nel caso di figura 4 il punto di ascissa 1918 (la cui ordinata è circa 202) non indica che nel 1918 è stato stabilito il record di 202 cm.

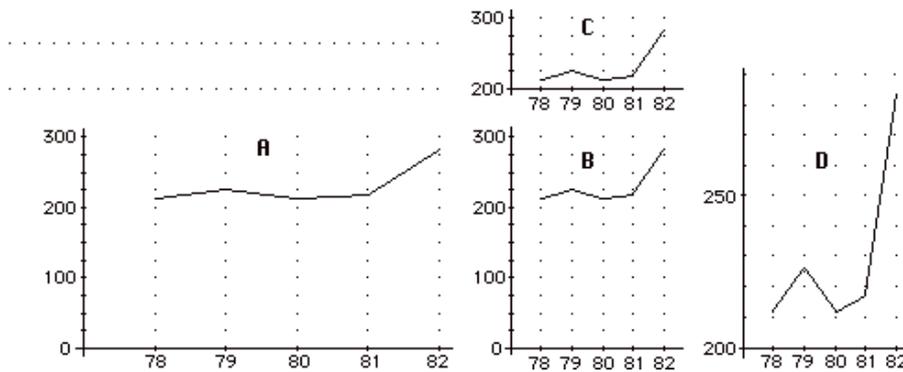
Invece i punti del grafico di figura 3 rappresentano tutti una relazione tra le grandezze "anno" e "record in vigore". Ad esempio il punto (1918,201) indica che nel 1918 era in vigore il record di 201 cm. Più in generale questo grafico rappresenta le coppie (*A*,*R*) così descrivibili: «nell'anno *A* era in vigore il record *R*».

I grafici delle figure 1 e 2 sono costituiti entrambi dai punti (*A*,*R*) così descrivibili: «il record *R* è stato stabilito nell'anno *A*». Essi differiscono solo per la ***scala*** numerica che è stata fissata sull'asse verticale: in una al punto in comune con l'asse orizzontale è stato assegnato il valore 0 e alla distanza tra due tacche è stato associato il valore 5 (cm), nell'altra allo stesso punto è stato assegnato il valore 198 e alla distanza tra due tacche si è associato il valore 1. La scelta di scale opportune è assai importante per rendere più leggibile un grafico o più evidente il fenomeno che con esso si vuol rappresentare. Bisogna comunque osservare che, se non si tiene conto della scala scelta, si può essere indotti a valutazioni errate. Ad es. il grafico di fig. 2 rispetto a quello di fig. 1 può far sopravvalutare i miglioramenti che si sono verificati nel salto in alto.

5 Sotto sono raffigurati diversi grafici della tabella a fianco (la disoccupazione in Italia in alcuni anni del secolo scorso).
(1) Quali grafici pensi sarebbe stato più facile trovare in un giornale finanziato da gruppi economici vicini ai partiti che in quegli anni erano al governo? (2) Quali pensi sarebbe stato più facile trovare in un volantino sindacale?

anno	disoccupati (in migliaia)
1978	212
1979	226
1980	212
1981	217
1982	283

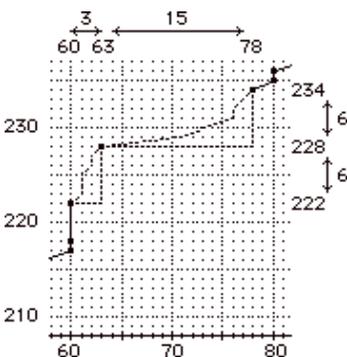
. . . .

. . . .

6 Torniamo al salto in alto. Di quanti centimetri è migliorato il record dal '12 all'88? ....

7 Dal 1960 al 1963 il record ha avuto un aumento di ...... cm. Dal 1963 al 1978 ha avuto un aumento di ...... cm. Possiamo dire che nei due periodi l'evoluzione della specialità è stata egualmente rapida? (motiva la tua risposta facendo riferimento al grafico di fig. 3 o a quello di fig. 4)

....

8 Completa la tabella seguente:

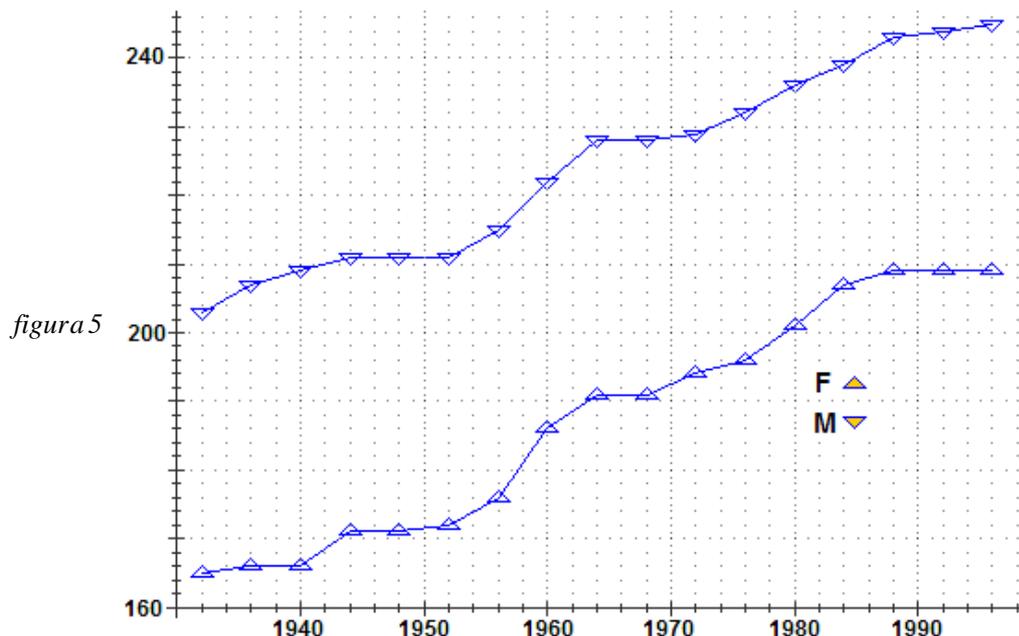
intervallo di anni	durata (anni)	aumento del record (cm)	aumento medio (cm/anno)
1960-1963			
1963-1978			

Nel periodo 1960-1963 il grafico è più ripido che nel periodo 1963-1978. In altre parole la sua *pendenza media* (rapporto tra avanzamento verticale e avanzamento orizzontale) è maggiore.

Senza andare a misurare con il righello i due avanzamenti possiamo esprimere numericamente la pendenza mediante l'***aumento medio*** annuo, cioè il rapporto tra aumento del record (variazione dei valori rappresentati sull'asse verticale) e numero degli anni trascorsi (variazione dei valori rappresentati sull'asse orizzontale).

Abbiamo visto che nel primo periodo l'aumento è di 2 cm all'anno e che nel secondo è di 0.4 cm all'anno. Possiamo pure dire che nel primo periodo il record è cresciuto più *velocemente*.

2. Record maschili e femminili - I numeri indici e le variazioni percentuali

Per approfondire l'analisi dell'evoluzione del salto in alto consideriamo anche i record femminili. La *figura 5* presenta sullo stesso sistema di riferimento il grafico dei record maschili e quello dei record femminili; più precisamente sono considerati solo gli anni in cui si sono svolte o si sarebbero dovute svolgere le Olimpiadi e i record che in quegli anni erano in vigore. Il grafici partono da 1932; infatti prima lo sport femminile non esisteva ufficialmente.

figura 5

9 (a) In quali periodi i record femminili sono evoluti più velocemente? (b) Sono i periodi in cui sono evoluti più velocemente anche i record maschili? (c) Come hai stabilito ciò?

....

....

....

10 L'andamento simile dei due grafici fa supporre che vi siano dei fattori comuni che hanno condizionato, in positivo o in negativo, l'evoluzione della specialità. Sicuramente la stasi negli anni 40 è dovuta alla seconda guerra mondiale (le Olimpiadi del 1940 e del 1944 non sono state disputate). Quali possono essere state le cause dell'impennata nella seconda metà degli anni 50 e della ripresa dopo il 1970?

....

....

....

Vogliamo costruire un *modello* che ci consenta di confrontare meglio l'andamento (a partire dal 1932) dei record maschili e dei record femminili, tenendo conto che la differenza tra le quote raggiunte dagli uomini e quelle raggiunte dalle donne dipende anche dalla diversa costituzione fisica, e in particolare dalla diversità di altezza. Un'idea può essere quella illustrata in *figura 6*: dilatare o contrarre verticalmente i due grafici fino a far coincidere il punto di partenza. Nella figura i grafici sono stati entrambi contratti verticalmente (di più quello dei maschi, meno quello delle femmine) in modo da farli partire dal medesimo punto H.

Come possiamo realizzare questa trasformazione? Possiamo procedere in modo simile a come abbiamo operato nella Scheda 1 per confrontare come cambiavano i consumi in epoche diverse:

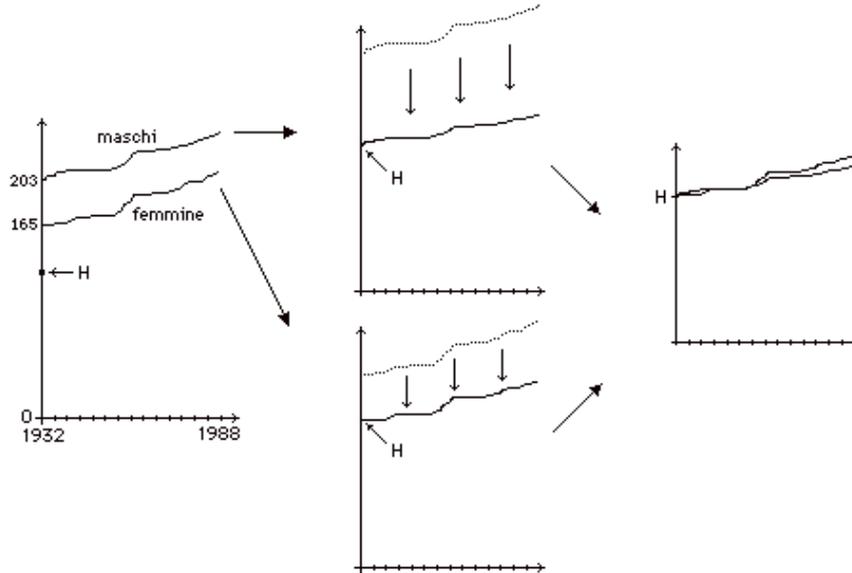



figura 6

• là non potevamo confrontare direttamente i dati relativi a anni diversi poiché era cambiato il valore (e il tipo) della moneta; quindi per ogni anno trasformavamo in 100 (o in 360) il totale dei consumi e modificavamo proporzionalmente i dati relativi alle singole voci; in questo modo potevamo valutare come cambiava l'incidenza di una voce indipendentemente dai cambiamenti di valore della moneta;

• qui non possiamo confrontare direttamente l'evoluzione dei record dei due sessi poiché i due grafici partono da valori diversi (165 e 203 cm nel 1932); allora possiamo porre uguale a 100 il record maschile del 1932 e modificare in proporzione quelli degli altri anni, fare lo stesso per i record femminili e rappresentare graficamente i dati così trasformati.

In pratica, mentre prima esprimevamo in forma percentuale il rapporto tra ogni *dato* e il *totale*, cioè calcolavamo: $\frac{dato}{totale} \cdot 100$

ovvero moltiplicavamo ogni dato per il fattore di proporzionalità "*totale* → 100": $dato \cdot \frac{100}{totale}$

ora calcoleremo: $\frac{record}{record\ iniziale} \cdot 100$ ovvero: $record \cdot \frac{100}{record\ iniziale}$

Quindi per trovare come rappresentare, ad es., il record femminile di 209 cm si può calcolare il rapporto tra 209 e il record iniziale (165) ed esprimerlo in centesimi:

209/165 = 1.2666… = 126.666…%

Quindi 209 è il 126.666… per cento di 165, cioè, posto 165 uguale a 100, 209 diventa 126.666….

Se si devono trasformare più dati conviene il 2° metodo: calcolare una volta per tutte il fattore di proporzionalità k (=100/165), memorizzarlo e man mano calcolare $record \cdot k$.

Per facilitare la rappresentazione consideriamo solo un anno ogni 4. Più precisamente consideriamo gli anni 1932, 1936, 1940, …, 1984, 1988 (cioè gli anni in cui si sono svolte o si sarebbero dovute svolgere le Olimpiadi) e i record che in quegli anni erano in vigore.

11 Completa la tabella a lato.
(usa opportunamente la CT)

	valori reali		valori nel modello		arrot. ai decimi	
anno	M	F	M	F	M	F
1932	203	165	100	100	100.0	100.0
1936	207	165	101.970…	…	102.0	…
1940	209	166	102.955…	100.606…	103.0	100.6
1944	211	171	103.940…	103.636…	103.9	103.6
1948	211	171	103.940…	103.636…	103.9	103.6
1952	211	172	103.940…	104.242…	103.9	104.2
1956	215	176	105.911…	106.666…	105.9	106.7
1960	222	186	109.359…	112.727…	109.4	112.7
1964	228	191	112.315…	115.757…	112.3	115.8
1968	228	191	112.315…	115.757…	112.3	115.8
1972	229	194	112.807…	117.575…	112.8	117.6
1976	232	196	114.285…	118.787…	114.3	118.8
1980	236	201	…	121.818…	116.3	121.8
1984	239	207	…	125.454…	…	…
1988	243	209	…	126.666…	…	…
1992	244	209	…	126.666…	…	…
1996	245	209	…	126.666…	…	…

Esaminando i valori del modello si ha un'idea più immediata di come sono evoluti i record. Infatti è più facile confrontare un numero con 100 che con 203 o con 165.

Questi valori con cui abbiamo rappresentato i dati vengono detti ***numeri indici***, cioè "numeri che indicano". Infatti non danno informazioni sull'entità dei dati reali (*numeri assoluti*), ma indicano soltanto come questi sono variati rispetto al dato che è stato posto eguale a 100. Questo dato, assunto come punto di riferimento, viene chiamato ***dato base***. Abbiamo quindi:

(**2.1**) $\textit{numero indice} = \dfrac{\textit{dato}}{\textit{dato base}} \cdot 100$ ovvero: (**2.2**) $\textit{numero indice} = \textit{dato} \cdot \dfrac{100}{\textit{dato base}}$

A volte il dato base viene associato a numeri diversi da 100 (in particolare 1 e 1000).

A fianco sono riprodotti i grafici dei numeri indici dei record considerati nella tabella precedente.

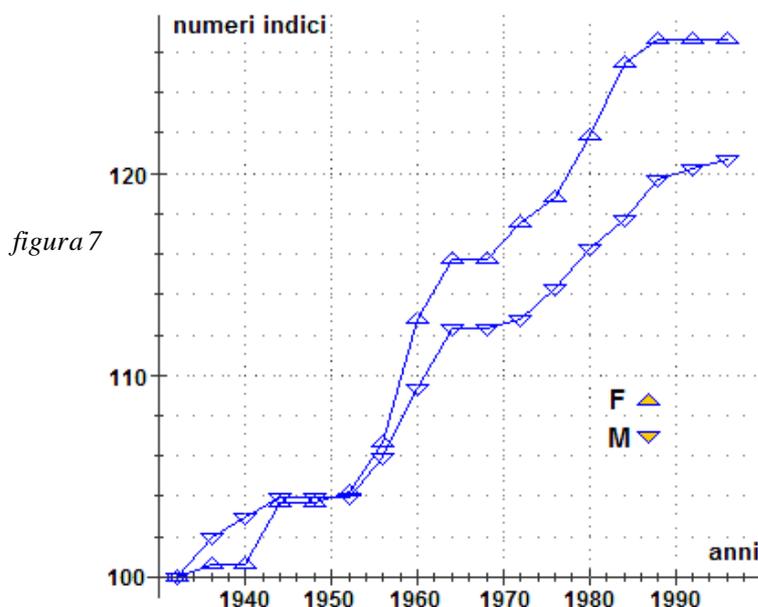



figura 7

Sui grafici si può osservare che in una prima fase (anni 30) la specialità femminile è progredita più lentamente di quella maschile (che era praticata già da molti anni ed era in fase di netta evoluzione). Successivamente le donne hanno avuto miglioramenti man mano più intensi, fino a che il numero indice del loro record ha *sorpassato* quello degli uomini.

	M		F	
'32	203	100	165	100
'52	211	103.9	172	104.2

12 Tra il 1932 e il 1952 il primato di salto in alto per le donne è aumentato di 7 cm; per gli uomini l'aumento è stato di 8 cm, cioè maggiore. Passando dai dati assoluti ai numeri indici l'aumento è ancora maggiore per gli uomini? ....

Possiamo dire che il record femminile in questo periodo è aumentato del 4.2%, cioè di 4.2 centesimi (vedi *figura 8*), mentre quello maschile è aumentato del 3.9%.

0 50 100

100 segmentini → 104.2 segmentini: 4.2 centesimi (4.2%) in più 104.2

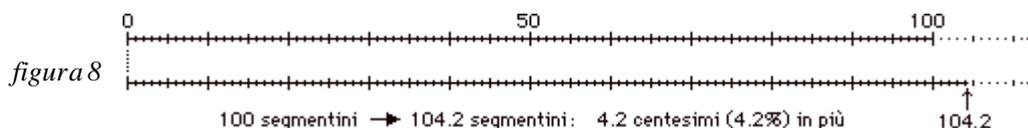



figura 8

La *variazione assoluta* tra dato iniziale e dato finale (cioè *dato finale – dato iniziale*) è spesso meno espressiva della ***variazione percentuale***, cioè della variazione descritta in *centesimi del dato iniziale*.

Quando non si disponga già di una rappresentazione in numeri indici che abbia il dato iniziale come dato base, per calcolare la variazione percentuale occorre prima trovare il rapporto percentuale tra dato finale e dato iniziale. Quindi si calcola quanti centesimi in più (nel caso di aumento) o in meno (nel caso di diminuzione) vi sono rispetto al 100%. In formule:

(**2.3**) $\textit{rapporto percentuale} = \dfrac{\textit{dato finale}}{\textit{dato iniziale}} \cdot 100$ (= *n° indice* con base *dato iniziale*)

(**2.4**) $\textit{variazione percentuale} = \textit{rapporto percentuale} - 100$

Come esempio calcoliamo con la CT la variazione percentuale tra il record femminile del 1952 (172 cm) e quello del 1960 (186 cm). Dobbiamo battere:

186 [÷] 172 [=]

Otteniamo: 1.08139… = 108.139… centesimi = [arrotondando] 108.1 %

186 è 1.081 *volte* 172 → 186 è 172 più 8.1 centesimi di 172 → la variazione è dell'8.1% in più.

13 Di quanto è variato il numero indice dei record femminili passando dal 1952 al 1960? È uguale alla variazione percentuale trovata sopra? Perché questa diversità rispetto alla situazione del quesito 12?

………

………

14 Elezioni politiche nel paese XX. Il Partito A passa dal 18.4% dei voti al 17.1%. Il partito B passa dal 29.6% al 27.8% dei voti. Il leader del partito A afferma: «Abbiamo tenuto più del partito B. Noi siamo scesi solo poco più dell'1%, mentre loro sono scesi quasi del 2%».

In effetti la variazione da 18.4 a 17.1 è -1.3 (più vicina a -1 che a -2), mentre quella da 29.6 a 27.8 è -1.8 (più vicina a -2 che a -1). Tuttavia se rappresentiamo il *consenso* che riceve un partito con la sua percentuale di voti e valutiamo di quanto è variato percentualmente il *consenso* di A e di B possiamo renderci conto delle sciocchezze che ha detto il leader di A. Completa i seguenti calcoli:

$$\frac{\textit{consenso nuovo di A}}{\textit{consenso precedente di A}} = \frac{17.1}{18.4} = 0.9293\ldots = 92.9\%: \quad \textit{diminuzione} \text{ del } 7.1\%$$

$$\frac{\textit{consenso nuovo di B}}{\textit{consenso precedente di B}} = \frac{27.8}{29.6} = \ldots\ldots\ldots \qquad \textit{diminuzione} \text{ del } \ldots\ldots$$

Per risolvere le difficoltà che hanno messo in luce i quesiti 13 e 14 si può usare il termine ***punti percentuali***. Nel caso del quesito 14 possiamo dire che A ha perso 1.3 punti percentuali e che B ha perso 1.8 punti percentuali. Nel caso del quesito 13 possiamo dire che il record femminile dal 1952 al 1960 è aumentato di 8.5 punti percentuali. Ma non si tratta di variazioni percentuali del consenso di un partito o di variazioni percentuali del record:

– nel caso del partito A, il numero 1.3 rappresenta centesimi del totale dei voti, non dei voti di A,

– nel caso dei record, 8.5 rappresenta centesimi del record del 1932, non del record del 1952.

15 Nel caso di diminuzioni percentuali si può evitare di fare mentalmente la differenza tra il rapporto percentuale e 100; si può infatti usare facilmente la CT. Ad esempio dopo aver trovato che *consenso nuovo di A*/*consenso vecchio di A* = 0.9293… possiamo sottrarre da tale numero 1 ottenendo -0.0706… = -7.06…% = [se arrotondiamo ai decimi] -7.1%. Scrivi la sequenza di tasti che impieghi per fare completamente questo calcolo.

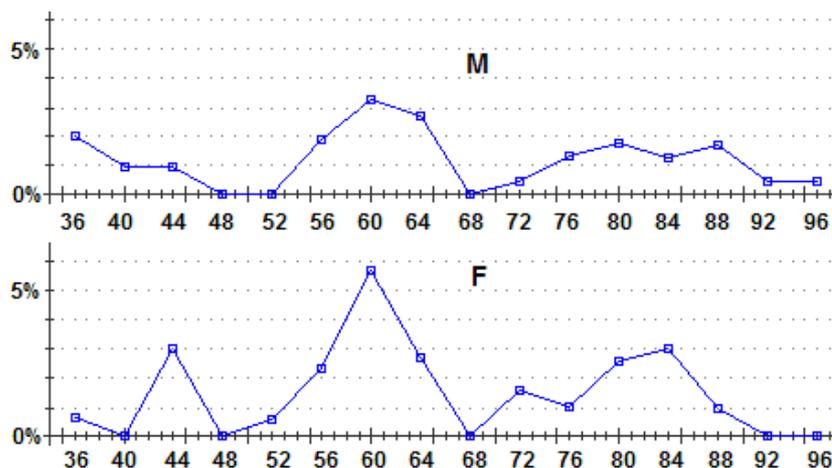
………

Dai grafici di figura 7 si ha l'impressione che le donne dal 1950 al 1990 abbiano guadagnato rapidamente terreno sugli uomini. Sembra infatti che il record femminile sia cresciuto molto più velocemente del record maschile. Dai grafici di figura 5 emerge invece che in quegli anni record maschili e femminili sono cresciuti più o meno con la stessa velocità.

Questa errata impressione è dovuta al fatto che i numeri indici rappresentano le percentuali rispetto ai dati del 1932, senza tener conto dei successivi miglioramenti:

– per le donne 2 cm in più sono sempre un aumento di 2/165·100 = 1.2 punti percentuali;

– per gli uomini 2 cm in più sono sempre un aumento di 2/205·100 = 1.0 punti percentuali.

Per un miglior confronto dell'andamento dei record maschili e dei record femminili possiamo rappresentare graficamente le variazioni percentuali ogni 4 anni, cioè rappresentare per il 1936 la variazione percentuale rispetto al 1932, per il 1940 la variazione percentuale rispetto al 1936, e così via. Si ottengono i grafici di *figura 9*.

variazioni percentuali di 4 anni in 4 anni del record *maschile* di salto in alto in vigore

variazioni percentuali di 4 anni in 4 anni del record *femminile* di salto in alto in vigore

figura 9

16 Dal secondo grafico si osserva che nel '44 il record femminile ha una variazione del 3% rispetto a quello di 4 anni prima. C'è un altro quadriennio in cui il record femminile ha avuto la stessa variazione percentuale? Qual è? ....

Sia per gli uomini che per le donne, individua il quadriennio (o i quadrienni) in cui vi è stata la massima variazione percentuale e quello (o quelli) in cui vi è stata la minima variazione percentuale.

maschi: quadrienni con var. % max: .... con var. % min: ....
femmine: quadrienni con var. % max: .... con var. % min: ....

3. Ancora sui grafici - Le funzioni - Uso di Poligon (o altro software)

Nelle schede di questa unità didattica abbiamo considerato diverse relazioni di proporzionalità, cioè relazioni del tipo *grandezza2* = *grandezza1*·*k*. Si dice anche che *grandezza2* varia proporzionalmente a *grandezza1*; *k* viene detto *fattore di proporzionalità*: è il fattore moltiplicativo che applicato a *grandezza1* dà *grandezza2*.

Per abbreviare la scrittura invece di *grandezza1* e di *grandezza2* possiamo usare variabili costituite da una sola lettera, ad esempio x e y. La relazione può allora essere riscritta nella forma:

$$y = k \cdot x$$

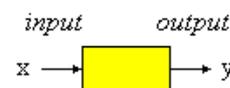
oppure (poiché il risultato di una moltiplicazione non muta scambiando 1° e 2° termine):

$$y = x \cdot k$$

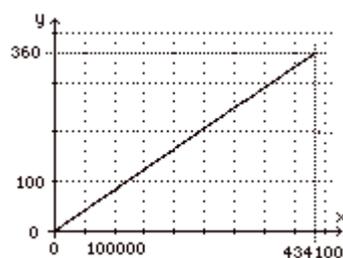
Abbiamo anche visto altre situazioni in cui i valori di una grandezza (y) possono essere individuati sulla base dei valori assunti da un'altra grandezza (x). Ad esempio: il *costo di una corsa ferroviaria* è determinabile con la tabella tariffaria se si conosce la *lunghezza del tragitto*; il *volume di un cubo* è calcolabile a partire dalla *lunghezza dello spigolo*; per specificare l'ammontare della *popolazione* italiana, il *record* del salto in alto, … dobbiamo precisare qual è la *data* presa in considerazione; per quantificare i *consumi alimentari annui* degli italiani dobbiamo riferirci a un *anno* particolare.

Si dice anche che y varia ***in funzione*** di x: il costo di una corsa ferroviaria varia in funzione della lunghezza del percorso, il costo di un prodotto venduto a peso varia in funzione del peso stesso, il volume di un cubo varia in funzione della lunghezza dello spigolo, … .

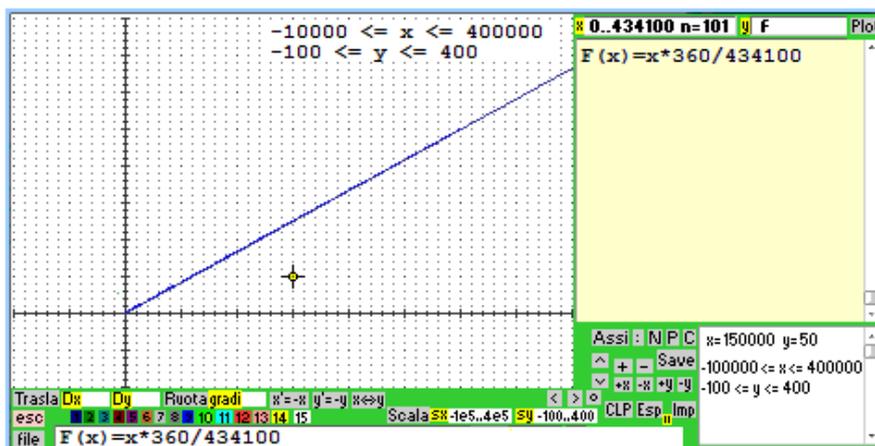
La relazione che intercorre tra x e y in questi casi è chiamata ***funzione***. Usando una terminologia informatica possiamo dire che y è l'output corrispondente all'input x; nel disegno a fianco la "scatola nera" rappresenta la funzione che ad x associa y.

input *output*
x → [ ] → y

Nel caso della relazione di proporzionalità, il grafico della relazione che ad x associa y assume l'aspetto di una retta che passa per il punto (0,0).

A fianco è, ad esempio, riprodotto in piccolo il grafico già considerato nel quesito e21 della scheda 1, dove con x si sono indicati i *dati* relativi ai consumi degli italiani nel 1985 e con y le *ampiezze* dei corrispondenti settori circolari, cioè il grafico della relazione:

$$y = x \cdot \frac{360}{434100}$$

Questo grafico lo avevate tracciato a mano su un foglio di carta millimetrata. Vediamo come potete realizzarlo al calcolatore, usando il programma **Poligon** (se siete in ambiente Windows). In modo simile potete usare altri programmi.

Nel caso del tracciamento a mano, dopo aver stabilito l'intervallo dei valori di *x* e l'intervallo dei valori di *y* che voglio rappresentare sulla carta millimetrata, fisso gli assi di riferimento e, in base alla porzione di carta che voglio occupare, scelgo su di essi scale"opportune".

Nel caso di Poligon è il computer a tracciare il grafico sulla base delle informazioni che gli fornisco introducendo dati e comandi in opportuni riquadri e "cliccando" opportuni bottoni. Essendo fissa la porzione di schermo destinata ai grafici, le scale sui due assi vengono automaticamente determinate dalla mia scelta degli intervalli per *x* e per *y*.

Poligon consente di tracciare grafici di funzioni di cui:

A) sia noto il termine che esprime *y* in funzione di *x*; ad esempio nel nostro caso sappiamo che *y* vale *x*·360/434100. Se la funzione viene indicata con il nome *f* il valore di *y* associato a *x* viene in genere indicato con *f*(*x*) (che si legge: «effe di x»);

B) oppure si conosca una tabella che contenga una quantità finita di valori di *x* e i corrispondenti valori di *y* (in questo caso POLIGON richiede la battitura delle coppie *x*,*y* e, se si vuole, l'indicazione di non congiungere un punto al successivo).

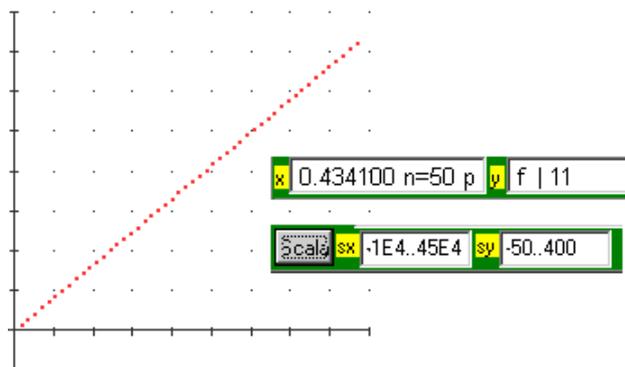
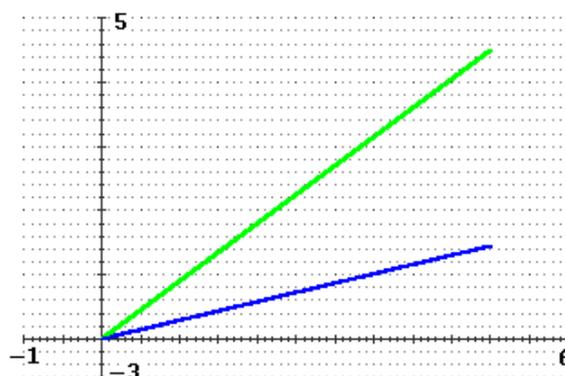
Nel caso A ci si descrive la funzione, assegnandole un nome, nel riquadro in basso nel modo illustrato sopra: si è considerata la funzione dell'ultimo esempio e si scelto per essa il nome F. Se poi si clicca il bottone [Imp] il programma importa questa definizione. Sulla finestra scorrevole a destra viene visualizzata la definizione, consentendoci di rivederla in un secondo momento (ed eventualmete di copiarla e incollarla in altri documenti).

Poi, nel riquadro "x" in alto, indico l'intervallo di valori in cui voglio far variare x separando l'estremo sinistro da quello destro con "**..**", e, nel riquadro "y" il nome della funzione. Infine clicco [Plot]. Nel riquadro "x" compare N=101, per dirci che il programma ha approssimato il grafico con 101 segmentini (una linea poligonale di 101 lati).

Nella finestra scorrevole in basso a destra compare una lista in cui sono richiamati gli intervalli per le x e per le y attualmente associati alla finestra-grafici.

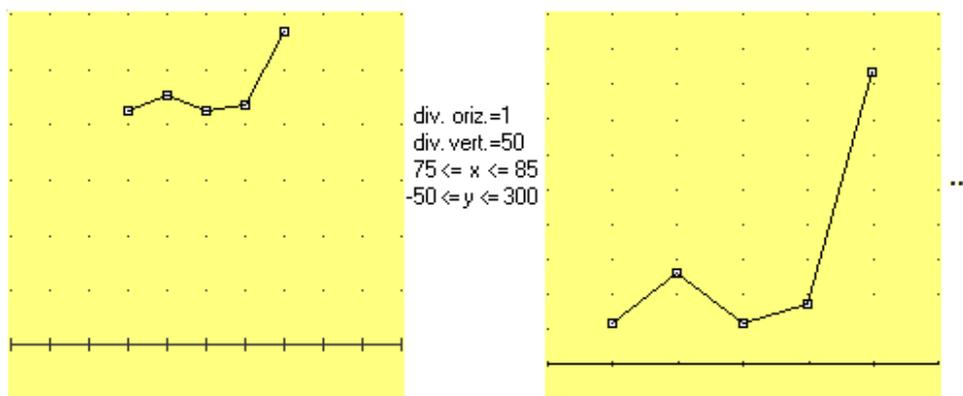
Ma se osserviamo la finestra grafici non riusciamo a distinguere il grafico di F: infatti inzialmente ad essa viene associata una parte di piano in scala monometrica. Se facciamo un doppio-clic su [o] riusciamo a **o**ttimizzare la scala. Poi possiamo modificarla cliccando [+] o [–] o "spostarla" cliccando [>], [<], [^] o [v]. Otteniamo quanto rappresentato sopra (qui rappresentato con colori invertiti). Se clicchiamo col mouse su un punto della finestra-grafici vengono visualizzate (nella finestra in basso a destra) le x e y che corrispondono (approssimativamente) ad esso (nell'esempio è il punto della griglia, corrispondente alla 3^a tacca grossa dell'asse x e alla 1^a dell'asse y).

Volendo possiamo scegliere direttamente gli intervalli per le x e le y da associare alla finestra indicandoli nei riquadri "sx" e "sy" e cliccando [Scala]. Volendo possiamo cambiare il numero dei segmentini da tracciare mettendo in "x" N=… a destra dell'indicazione dell'intervallo delle x; aggiungendo la lettera P facciamo sì che il grafico sia tracciato "per punti" (dei segmentini vengono solo tracciati gli estremi).

Per tracciare il **n**uovo grafico senza mantenere la visione del vecchio dobbiamo, prima di cliccare [Plot], fare un clic su [N]. Se dopo il nome della funzione si mette una barra verticale seguita da un numero (da 1 a 15) si può cambiare il colore del grafico. Ecco un esempio:

17 Usando Poligon (od altro software) traccia sullo stesso sistema di riferimento i grafici delle relazioni che esprimono il costo (in euro) in funzione del peso (in chilogrammi) di due prodotti venduti ai seguenti prezzi: 1.45 €/kg, 4.50 €/kg. Prevedi un peso massimo di 5 kg. Memorizza come *F* e come *G* le due funzioni e, dopo aver tracciato il grafico della prima, traccia quello della seconda. Cerca di ottenere una rappresentazione simile a quella a lato (la figura riprodotta è stata rimpicciolita e modificata in modo da evidenziare meglio griglia e grafici). [usa l'*help* per trovare suggerimenti]

[Per ora non sei in grado di comprendere tutte le informazioni fornite dall'help (ad esempio il significato di alcune funzioni e costanti, alcuni modi di descrivere le funzioni). Ricordiamo che il simbolo ^ indica l'elevamento a potenza (3^2 sta per 3^2). Nell'help viene osservato che un solo clic su [o] dà luogo a un sistema *monometrico*; questa espressione (derivante dal greco *monos*, che significa "unico"), indica che sui due assi si è scelta la stessa unità di misura. Con [3, 7], [-2, 4.5], [*x*1, *x*2], … si indica l'intervallo di numeri che va da 3 a 7, da -2 a 4.5, da *x*1 a *x*2, …, e più precisamente l'insieme dei numeri che sono maggiori o uguali a 3 e minori o uguali a 7, … **]**

18 Usando Poligon è stato tracciato il grafico della funzione F che ad ogni anno associa la quantità (in migliaia) dei disoccupati italiani considerata nel quesito 5. La funzione è presentata sotto forma di tabella. Non conoscendo l'espressione generale del termine F(x) si è dovuto scegliere il tracciamento punto per punto. Più precisamente, si sono introdotte man mano x e y (nei riquadri "x" e "y") e si è via via cliccato [Plot]. Inizialmente si sono scelti (usando [Scala]) gli intervalli delle x e delle y da associare alla finestra. Si è ottenuto il grafico riprodotto sotto a sinistra.

Si è poi introdotto un "salto" (si è scritto S nel riquadro "x" e si è cliccato [Plot]) e si è tracciato il segmento che va da "x=75, y=200" a "x=85, y=200" (come nuovo "asse x"). Infine si è modificata la scala, ottenendo il grafico riprodotto a destra.

Completa le indicazioni sulla scala e le divisioni del secondo grafico e controlla le tue risposte impiegando Poligon. Prova poi ad effettuare il tracciamento di nuovi assi usando il comando "**origine=...**" (vedi l'help). [in alternativa, usa altro software]

4. Le tecniche e le attrezzature

Abbiamo visto (quesiti 9 e 10) che l'evoluzione del salto in alto ha avuto due accelerazioni in corrispondenza dello sviluppo di nuove ***tecniche*** di salto. Dopo la seconda guerra mondiale sono stati messi a punto nuovi stili di scavalcamento ventrale (l'assicella viene superata avvolgendosi attorno ad essa con il ventre e con il petto). Dopo la stasi che è seguita a questa rapida evoluzione è stato messo a punto lo scavalcamento dorsale (stile Fosbury); siamo agli inizi degli anni 70. Sull'evoluzione delle prestazioni sportive incidono molti altri fattori.

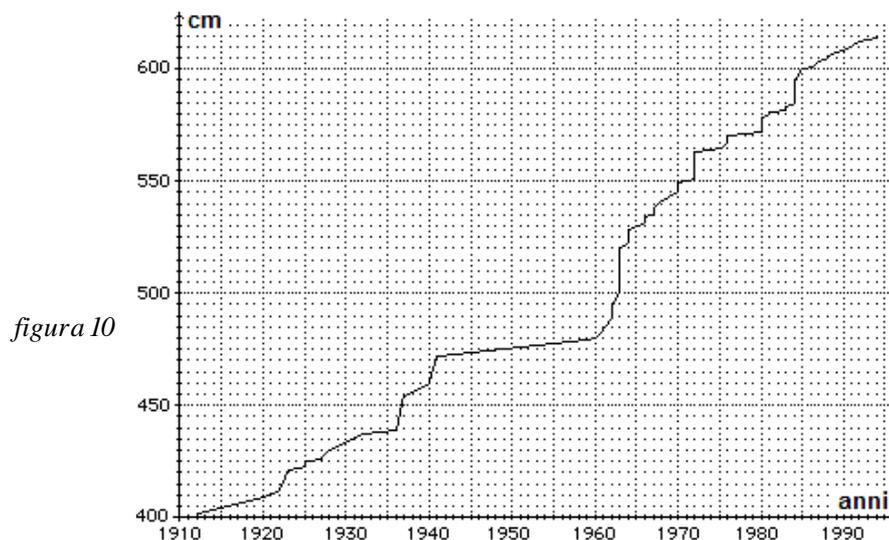
Da una parte incide il complessivo miglioramento delle condizioni di vita (si è visto nella scheda 1 come sono cambiati i consumi: la gente rispetto ad un secolo fa ha un'alimentazione più ricca, ha più tempo libero, svolge più attività sportiva, …), o, almeno, questo si è verificato nei paesi più sviluppati (la gente coinvolta è solo circa 1/4 dell'umanità). Quindi è più facile che un talento naturale abbia la possibilità di mettere in luce e sviluppare le proprie doti. Il miglioramento delle condizioni di vita incide anche sull'evoluzione del corpo umano. Ad esempio nel corso degli anni aumenta l'altezza della popolazione (dal 1912 al 2006 l'altezza media maschile in Italia è passata da 166 cm a 175 cm).

Poi gli atleti trovano aiuto nella medicina e nella biologia, che, approfondendo la conoscenza del funzionamento del corpo umano, individuano diete, metodi di allenamento, … (ma anche sostanze chimiche dannose per l'organismo) che possono migliorare le prestazioni.

Esaminiamo un altro sport: il ***salto con l'asta*** (specialità fino a pochi anni fa solo maschile). Nella *figura 10* è tracciato il grafico che visualizza la relazione tra i record di salto con l'asta e gli anni in cui sono stati stabiliti. Il periodo preso in considerazione va dal 1912 al 1994 (fino al 2009 il record non è stato migliorato). I punti (A,R), dove A è l'anno in cui è stato stabilito il record R, sono stati congiunti con dei segmenti.

19 Di quanti centimetri è migliorato il record dal 1960 al 1965? ………

20 Un aumento di circa mezzo metro in 5 anni (di cui la metà nel giro di un solo anno) non può essere solo frutto di nuove tecniche di salto, nuove forme di allenamenti, …. Secondo voi a quale fattore può essere attribuito il grosso di questa evoluzione? ………………………………………………………

figura 10

Si potrebbero analizzare altri sport, andare più a fondo per studiare l'incidenza di tecniche e ***attrezzature*** (dall'asta in bambù o metallo all'asta in fibra di vetro, dalla pista in terra alla pista in materiali sintetici, dall'impugnatura del giavellotto con una certa forma a un nuovo modello di impugnatura, ecc.), cercare di individuare dai grafici se si possono ipotizzare dei limiti alle prestazioni umane (ad esempio: quale velocità si potrà raggiungere nella specialità dei 100 m di corsa?), … Ma ci fermiamo qui: non era nostro scopo tanto andare a fondo in questa analisi quanto illustrare il ruolo che può svolgervi la matematica.

In particolare abbiamo visto quante informazioni, quanti approfondimenti, … si possano ottenere utilizzando opportunamente alcuni *semplici* modelli matematici. Abbiamo tuttavia visto anche come questi strumenti non siano sempre di uso *semplice*. La difficoltà non sta nel fare qualche conto (in questo ci aiutano egregiamente le CT), ma nell'usare il modello adeguato e nell'interpretare opportunamente le informazioni che esso ci può fornire.

5. Esercizi

e1 In un opuscolo per turisti americani è presente il grafico riprodotto a lato, che mette in relazione la misura della temperatura in gradi Celsius (o centigradi) con quella in gradi Fahrenheit (usati nei paesi di lingua inglese). Ad esempio il punto (0,32) indica che a 0°C corrispondono 32°F, il punto (100,212) che a 100°C corrispondono 212°F. Che cosa indicano gli altri punti che abbiamo circolettato?

(cerca di ricavare dal grafico i valori approssimati alle unità, tollerando l'errore di un grado in più o in meno)

e2 Il grafico seguente rappresenta l'altitudine della linea ferroviaria Padova-Calalzo [➡ *LMSM-2*]. Calcola (arrotondata a 2 cifre) la pendenza media di tale linea ferroviaria, cioè il rapporto tra variazione complessiva di altitudine e strada percorsa "orizzontalmente" (come abbiamo visto, nel caso delle pendenze stradali, si può approssimare l'avanzamento orizzontale con la lunghezza del tratto percorso; quindi puoi prendere 158 km come strada percorsa orizzontalmente). Se la linea ferroviaria avesse pendenza costante, cioè avesse la rappresentazione grafica tratteggiata, quale sarebbe la sua pendenza?

e3 Un treno Milano-Roma parte alle 7:55, alle 9:36 arriva a Bologna (219° km) e ne riparte alle 9:40; alle 10:41 arriva a Firenze (316° km) e ne riparte alle 10:50. Alle 12:43 arriva a Roma alla stazione Tiburtina (626° km). Quali espressioni devi battere come x e come y per ottenere con Poligon il grafico seguente che esprime la posizione (in km) del treno lungo la linea Milano-Roma in funzione del tempo (in ore)? [ricorda che ad es. 10:17 sta per 10 h 17', cioè 10+17/60 h; verifica la tua risposta al calcolatore]

x = y =
x = y =
x = y =
x = y =
x = y =
x = y =

Dal grafico (vedi freccia) si può dedurre che alle 12 il treno (se in orario) transita al 510° km?

....

```
x1= 7
x2= 13
divis.oriz.= 1
y1=-10
y2= 700
divis.vert.= 100
```

e4 Il costo di un particolare viaggio in pullman è passato da 1.7 € a 2.1 €. Calcola il rapporto tra prezzo nuovo e prezzo vecchio e, da questo valore, ricava l'aumento percentuale del prezzo della corsa.

e5 Un vestito che costa 19 € viene venduto in liquidazione a 16 €. Calcola il rapporto tra prezzo nuovo e prezzo vecchio e, da questo valore, ricava lo sconto percentuale corrispondente.

e6 Una maglia, il cui prezzo è 70 €, viene venduta con uno sconto del 25%, cioè ad un prezzo pari al 75% (=0.75) del prezzo di listino. Qual è il prezzo scontato?

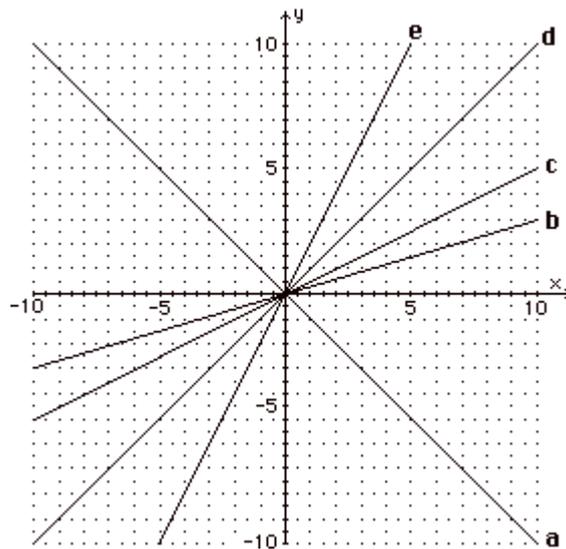
e7 Traduci in una formula la frase «La distanza tra due località si ottiene dividendo la distanza tra le corrispondenti posizioni sulla cartina per il fattore di scala» usando le variabili *DistanzaRealtà*, *DistanzaCarta* e *FattoreScala*.

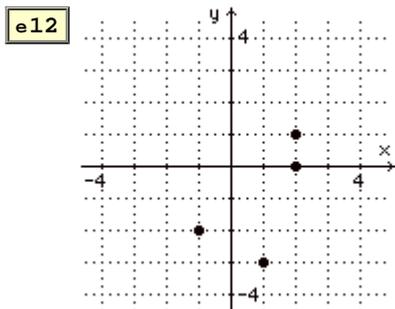
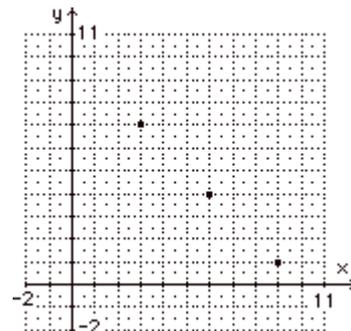
e8 Traduci in una formula la frase «Detraendo le trattenute dallo stipendio lordo si ottiene lo stipendio netto» usando le variabili *StipendioNetto*, *Trattenute* e *StipendioLordo*.

e9 Traduci in una formula la frase «L'imposta è pari al 22 per cento del valore che si ottiene detraendo le trattenute dal reddito lordo» usando le variabili *Imposta*, *Trattenute* e *RedditoLordo*.

e10 A fianco sono tracciate alcune rette che, nel sistema di riferimento fissato, rappresentano delle relazioni tra i numeri rappresentati sull'asse orizzontale e i numeri rappresentati sull'asse verticale.

Sotto sono elencate alcune relazioni tra un generico numero x rappresentato sull'asse orizzontale e un generico numero y rappresentato sull' asse verticale. Si associ ad ogni retta la relazione che essa rappresenta (per motivare la scelta fatta si individui un punto (x,y) appartenente alla retta considerata, ma non alle altre rette).

(1) x è il doppio di y;
(2) $y = x$;
(3) $x = -y$;
(4) y è il 30% di x;
(5) $y = x \cdot 2$

e11 Completa (a fianco) il grafico della relazione tra i numeri x rappresentati sull'asse orizzontale e i numeri y rappresentati sull'asse verticale così definita:

«x e y sono in relazione se sono entrambi interi positivi e hanno come somma 10».

e12 Completa (a fianco) il grafico della relazione:

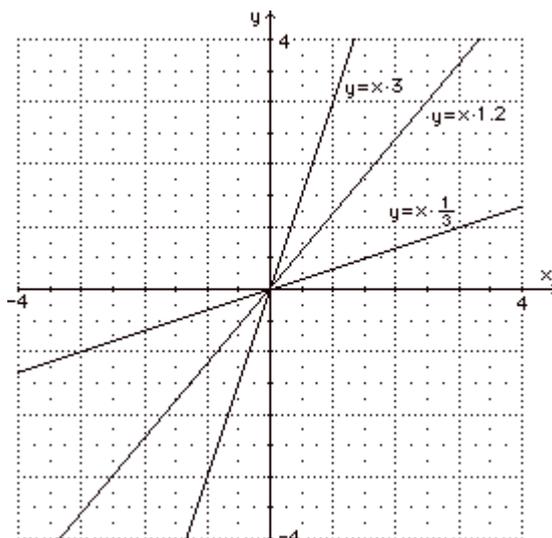
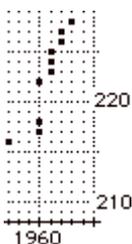
«x e y sono interi appartenenti all'intervallo [-3,3] tali che $x>y$».

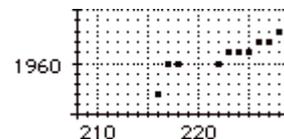
Sono già tracciati i punti corrispondenti alle seguenti diseguaglianze:

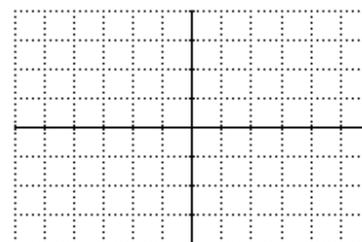
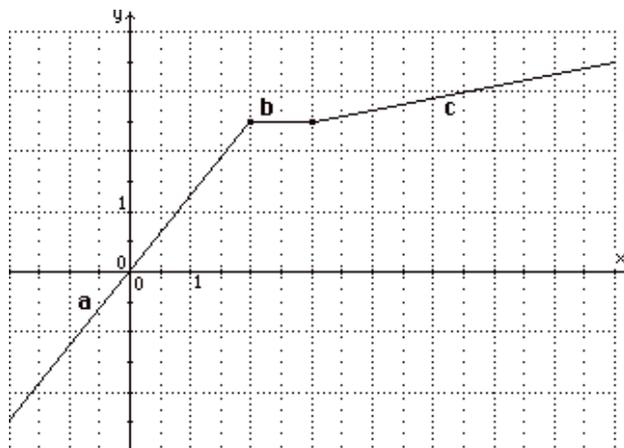
2>1, 2>0, -1>-2, 1>-3

e13 A fianco sono riprodotte le rette che sono grafici delle relazioni:

$y = x\cdot(1/3)$, $y = x\cdot 1.2$, $y = x\cdot 3$.

Calcola la pendenza (= spostamento verticale/spostamento orizzontale) delle tre rette.

e14 Le relazioni del quesito e13 rappresentano *y* "in funzione" di *x*. Dato *x* si può ricavare *y* sia usando le equazioni che ricorrendo al grafico: ad esempio nel caso di y=x·1.2 si può stabilire che a 3 viene associato 3.6 osservando che l'unico punto con *x*=3 del grafico ha *y*=3.6.

Nel caso del grafico di figura 2, che rappresenta i *record* e gli *anni* in cui sono stati stabiliti e che è stato parzialmente riprodotto a sinistra, non siamo di fronte a una rappresentazione del *record* "in funzione" dell'*anno*: non basta fissare un *anno* per individuare un particolare *record* in quanto nello stesso anno possono essere stati stabiliti più record. Ad esempio in corrispondenza dell'ascissa 1960 abbiamo 3 punti del grafico, di ordinate 212, 213 e 222.

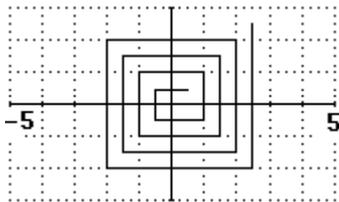
Si può, invece, esprimere l'anno in funzione del record: dato un record posso trovare in maniera univoca l'anno in cui è stato stabilito: nel grafico a destra, in cui sono stati scambiati i due assi di riferimento, non vi sono punti con la medesima ascissa.

Nel caso delle relazioni di e10, e11, e12 siamo di fronte a situazioni in cui *y* è funzione di *x*?

e15 Riproduci a fianco le tre rette passanti per (0,0) con pendenze 0.5, 1 e 1.5 che ottieni con Poligon come grafici di tre opportune funzioni F, G ed H, e scrivi le espressioni di F(x), G(x) e H(x). Indica le x e le y minima e massima rappresentate sulla finestra-grafici (usa un sistema monometrico).

e16 Calcola la pendenza dei tre tratti rettilinei che compongono il grafico a lato.

e17 Tenendo conto (quesito e1) che i punti (0,32) e (100,212) appartengono alla retta che rappresenta il grafico della temperatura in gradi Fahrenheit in funzione della temperatura in gradi Celsius, trova la variazione in °F corrispondente alla variazione di 1°C.

e18 Completa la tabella seguente (arrotondati i valori a 3 cifre); vedi i quesiti e14 e 57 della scheda 1.

anno	spesa alim. pro-capite	retribuzione lorda	spesa alim. pro-capite	retribuzione lorda
1926	$1.94 \cdot 10^3$ L	$9.15 \cdot 10^3$ L	21.2%	100
1945	$2.09 \cdot 10^4$ L	$7.34 \cdot 10^4$ L	28.5%	100
1965	$1.96 \cdot 10^5$ L	$1.42 \cdot 10^6$ L		100
1985	$2.04 \cdot 10^6$ L	$1.71 \cdot 10^7$ L		100
2005	$2.19 \cdot 10^3$ €	$3.01 \cdot 10^4$ €		100

e19 Rappresenta graficamente l'evoluzione della percentuale della spesa alimentare del quesito e18 (puoi usare *Poligon* sia per il grafico che per controllare i valori trovati: basta ad es. che batti 1.94*10^3/(9.15*10^3)*100= nel box in basso a sinsitra per ottenere la prima percentuale).

e20 −5 5

Poligon può essere impiegato anche per tracciare figure che non siano grafici di funzioni.

Ad esempio si può ottenere la figura a fianco. Indica la sequenza di punti che forniresti a Poligon (o del software che stai impiegando in classe) per ottenere questa figura e verifica la tua risposta al calcolatore.

e21 Un supermercato fa un'offerta "3 per 2" su alcuni prodotti. Cioè se il cliente compra 3 "pezzi" di un prodotto in offerta, ne paga 2 soli. Calcola lo sconto percentuale che corrisponde a questa offerta.

$$\text{rapporto} = \frac{\text{PrezzoScontato}}{\text{PrezzoIniziale}} = \frac{\text{CostoUnitario} \cdot 2}{\text{CostoUnitario} \cdot 3} = \frac{2}{3} = =.666\ldots = 66.6\ldots\% =$$

= [arrotondando alle unità] ......% = 100% – ......

Il prezzo iniziale viene diminuito (scontato) del ......%

e22 Un paio di jeans viene offerto in saldo a 57 €, con uno sconto del 20%. Qual era il prezzo in origine? [*traccia*: il prezzo scontato è l'80% del prezzo iniziale, cioè: *PrezzoScontato*=*PrezzoIniziale*·0.8; quindi: *PrezzoIniziale*=…]

e23 Su un particolare prodotto è prevista l'IVA del 20% (cioè il 20% del prezzo di vendita viene versato allo stato come imposta). A quanto si deve vendere il prodotto per incassare al netto dall'imposta 4.50 €? [*traccia*: procedi in maniera analoga al quesito precedente: *PrezzoVendita*=*PrezzoSenzaIVA*·… ; …]

e24 Dalla tabella del quesito 11 osserviamo che la variazione dei dati assoluti dal 1972 al 1980 è di 7 cm sia per gli uomini che per le donne mentre la variazione dei numeri indici corrispondenti è diversa (116.3-112.8 = 3.5 in un caso, 121.8-117.6 = 4.2 nell'altro). Come mai?

1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini:

grafico di una relazione (dopo fig.4), *pendenza media* (dopo ques.8), *aumento medio* (dopo ques.8), *numero indice* (dopo ques.11), *variazione percentuale* (prima di ques.13), *sistema monometrico* (ques.17), *grandezza che varia in funzione di un'altra* (§3).

2) Su un foglio da "quadernone", nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").

La automazione

Dalle macchine semplici alle macchine programmabili

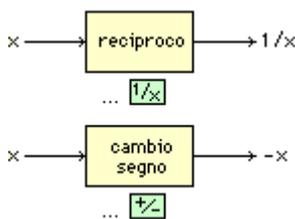
Scheda **2**

Le calcolatrici tascabili

1. Funzioni a 1 e a 2 input

Prima di approfondire la conoscenza e l'uso del calcolatore, ci soffermiamo ad indagare ulteriormente il funzionamento delle ***calcolatrici tascabili*** (CT), delle quali abbiamo già fatto uso numerose volte: si tratta di uno strumento di lavoro d'uso comune (sia a scuola che nella vita) di cui è opportuno avere una buona padronanza e la cui conoscenza ci può servire come introduzione allo studio dei calcolatori.

Infatti le CT sono macchine che registrano ed elaborano le informazioni in maniera simile ai calcolatori, anche se, in genere, sono in grado di trattare solo *dati* numerici e non sono programmabili, ma usano solo *programmi incorporati* (per chiarezza, useremo i termini "calcolatori tascabili" o "pocket computer" per indicare i mezzi di calcolo tascabili e programmabili). Ad es. se voglio trovare qual è la percentuale corrispondente a un dodicesimo posso calcolare l'espressione decimale di 1/12 usando il tasto [1/x]:

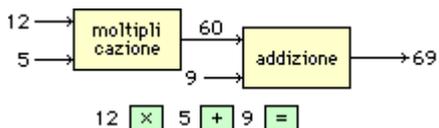
input *funzione* *output*

Con la sequenza 12 [1/x] ho comunicato alla CT che deve operare sul dato 12 mediante la funzione $x \to 1/x$ che che trasforma un numero nel suo reciproco. Per effettuare questa trasformazione la CT deve essere in grado di *registrare* il dato che ho introdotto con i tasti "1" e "2" e deve avere incorporato un *programma* per l'esecuzione del calcolo del reciproco.

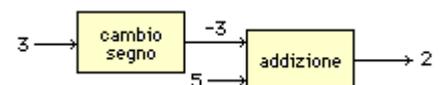
I tasti [1/x] e [+/–] sono tasti di funzione *a 1 input*: dopo la loro pressione viene visualizzato un numero che la CT calcola sulla base di un solo dato di input: il numero che appariva sul visore prima della pressione di [1/x] o [+/–].

Se invece vogliamo calcolare il costo di un prodotto che pesa 2.45 hg e è venduto al prezzo di 1.80 €/hg usiamo il tasto [×] nel modo seguente:

batto [1.80] premo [×] batto [2.45] premo [=] ottengo [4.41]
input *funzione* *input* *output*

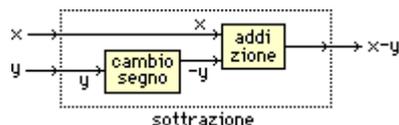
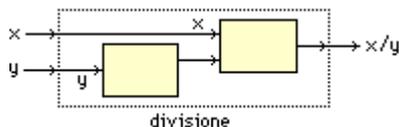
La moltiplicazione, così come la addizione, la sottrazione e la divisione, sono funzioni *a 2 input*: l'output viene calcolato sulla base di due dati di input: i 2 numeri che l'utente ha battuto prima e dopo il tasto [×] (o [+] o [–] o [÷]).

x → moltiplicazione → x·y
y →
... [×] ... [=]

Gli input di una funzione a volte vengono introdotti direttamente dall'utente, altre volte sono output di funzioni calcolate in precedenza. Ad esempio di fronte a 12·5+9 la CT prima calcola 12·5 e poi calcola 60+9: 60 non viene introdotto dall'utente.

1 Sulle CT non si possono introdurre direttamente i numeri negativi: per visualizzare –6 occorre prima battere 6 e poi premere il tasto di cambio-segno. Scrivi la sequenza di tasti che devi battere per eseguire il calcolo di –3+5. ....

2 Per battere i seguenti termini con una CT, in quali casi devi usare [–] e in quali devi usare [+/–] ? (cerchia i simboli "–" che devi introdurre usando [+/–])

(1) – 3 · 8 (2) – 3 – 8 (3) 3 · – 8 (4) 7 – – 5 (5) – 9 / 3

3 Si è rotto il tasto [−] della tua CT. Come puoi calcolare 123–56 usando i tasti [+] e [+/−]? ....

Possiamo quindi dire che la sottrazione è equivalente a una opportuna *composizione* (→ figura a fianco) della funzione cambio-segno e della funzione addizione.

4 Si è rotto il tasto [÷] della tua CT.
(1) Come puoi calcolare 432/3 usando [×] e [1/x] ?
(2) Completa la figura a fianco in modo da descrivere come la divisione può essere ottenuta componendo opportunamente la funzione reciproco e la funzione moltiplicazione.

In formule: **x – y = x + (–y)** [→ ques.3] **x / y = x · (1/y)** [→ ques.4]

5 *Che cosa* ottieni man mano sul visore della CT battendo: 5 [+/−] [+/−] [+/−] [+/−] [+/−] [+/−] [+/−] ?

Per calcolare 7––5 (ques.2) occorre battere: 7 [−] 5 [+/−] [=]. Si è visto (ques.3) che si può fare a meno di [−] battendo 7 [+] 5 [+/−] [+/−] [=], cioè calcolando 7 + – – 5.

6 Per quanto visto nel quesito 5 invece di 7 [+] 5 [+/−] [+/−] [=] potevo battere ....
cioè calcolare direttamente ....

Nei casi della sottrazione e della divisione se si commutano (cioè scambiano) il 1° e il 2° input si ottiene un output differente (a meno che 1° e 2° input siano uguali). Nel caso della addizione e della moltiplicazione l'output non cambia. Per esprimere ciò si usa dire che addizione e moltiplicazione soddisfano la ***proprietà commutativa*** o, più in breve, che sono commutative: una funzione F a 2 input si dice *commutativa* quando, comunque si diano a F due input x e y, se $x, y \to u$ allora si ha anche $y, x \to u$.

7 Molte CT sono dotate anche del tasto [x^y] (o [y^x]): la sequenza a [x^y] b fa calcolare e visualizzare il risultato di a^b. Questa funzione a 2 input è commutativa o no?
[nel primo caso spiega il perché, nel secondo caso mostra un "contro-esempio", cioè indica una coppia di input il cui output dipende da quale tra essi si prenda come base e quale come esponente]

2. I registri di lavoro e la gerarchia delle operazioni

tastiera	*visore*
[1] [2]	12
[×]	12
[5]	5
[+]	60
[9]	9
[=]	69

Vediamo che cosa appare sul visore man mano che eseguiamo il calcolo di 12·5+9 con una CT (o con la calcolatrice di un cellulare).

Quando premiamo [×] sul visore si continua ancora a leggere 12; quando battiamo il secondo termine della moltiplicazione, 5, il numero 12 scompare. Ciò significa che la CT dopo la battitura di 5, oltre che del 5 stesso, si ricorda del 12 × battuto in precedenza: altrimenti non saprebbe quale calcolo eseguire.

Per far questo deve essere dotata di opportuni dispositivi in cui *memorizzare* le informazioni che le vengono comunicate attraverso la tastiera (numeri e operazioni). Ce ne saranno almeno due per conservare i termini dell'operazione e uno per conservare (opportunamente codificato) il segno dell'operazione.

Dopo la pressione di [+] scompare il 5 e compare il risultato della moltiplicazione, 60. A questo punto la CT può dimenticare 12× e deve invece memorizzare 60+; battuto 9, dopo la pressione di [=] compare il risultato di 60+9 e la CT dimentica anche 60+.

I dispositivi per la conservazione dei dati vengono chiamati ***registri*** (o *memorie*) ***di lavoro***.

8 Batti 1 [+] 2 [×] 5 [=]. Quale risultato ottieni? E` lo stesso ottenuto dai tuoi compagni?

L'ultimo esercizio mette in luce che non tutte le CT sono costruite in modo da rispettare le priorità tra le operazioni.

Come sai, il termine 1+2·5 deve essere interpretato come 1+(2·5), cioè il suo valore deve essere calcolato eseguendo le operazioni non "a catena", man mano che vengono incontrate, ma dando la precedenza alla moltiplicazione rispetto alla addizione. Invece 8/2·2, 1/10/2, 9–2+3,… devono essere interpretati come (8/2)·2 [non 8/(2·2)], (1/10)/2 [non 1/(10/2)], (9–2)+3 [non 9-(2+3)], …, cioè devono essere calcolati a catena, in quanto presentano operazioni con uguale livello di priorità.

Invece, alcune CT non danno il risultato 11, ma eseguono il calcolo a catena, cioè calcolano (1+2)·5, dando come risultato 15. Cerchiamo di capirne il motivo.

Consideriamo una CT che "non sbaglia".
Dopo la battitura di × la CT non esegue 1+2, ma *tiene in sospeso* 1+ perché la moltiplicazione è prioritaria rispetto alla addizione.
Alla battitura di = esegue 2·5, ne memorizza il risultato 10 (senza visualizzarlo) e poi completa e esegue l'operazione 1+… che aveva tenuto in sospeso.

Consideriamo una CT che "sbaglia".
Appena battiamo × esegue l'operazione già impostata, cioè 1+2, e subito dopo memorizza il risultato 3.
Appena battiamo = esegue l'unica operazione rimasta impostata, cioè 3·5: ciò significa che è in grado di memorizzare solo due dati e una operazione.

Le CT che "sbagliano" in realtà non sbagliano. Si comportano seguendo il programma che è stato incorporato dal costruttore, programma che prevede l'esecuzione dei calcoli a catena: appena viene premuto il tasto = o un nuovo tasto di operazione viene eseguita l'operazione precedentemente impostata. Sta all'utente utilizzare la CT rispettandone e sfruttandone al meglio le caratteristiche.

In una CT che "non sbaglia" è invece incorporato un programma più complesso, che effettua dei controlli sui tasti di operazione battuti: quando viene premuto un nuovo tasto di operazione l'operazione precedentemente impostata non viene eseguita se la nuova operazione è prioritaria: se la nuova operazione è "·" o "/" e l'operazione precedentemente introdotta è "+" o "–", questa viene tenuta in sospeso in attesa che venga completato il calcolo della nuova operazione.

9 Introduci nei termini seguenti (*solo quando è necessario*) parentesi in modo che una persona che non conosca le "priorità" possa interpretarli correttamente. [il primo termine è già completato come esempio]

59 + 147 / 7 → 59 + (147 / 7)
73 – 27 + 125 → ....
573 – 17 · 25 → ....
53 · 12 + 25 → ....
(18 + 37) / 5 + 19 · 3 → ....

10 Come è possibile eseguire correttamente il calcolo di 1+2·5 con una calcolatrice dotata di due soli registri di lavoro (senza fare calcoli a mente o annotarsi o ricordarsi risultati intermedi)?
e di 5–8/4? e di 5/(1+2)? e di 4·3+2·5? [Si tratta di esempi con numeri che consentono il calcolo mentale; in questo modo potete fare più velocemente e facilmente i tentativi e le loro verifiche]

3. La memoria-utente e i tasti-parentesi

Per fare un calcolo come ***a+b/c*** [o *a+b·c*] con una CT che non ha incorporata la gerarchia delle operazioni posso usare la proprietà commutativa dell'addizione e trasformare il termine dato in quello equivalente ***b/c+a*** [*b·c+a*] riconducendomi a un calcolo in cui le operazioni devono essere eseguite una dopo l'altra a partire da sinistra.

Di fronte a $a-b/c$ [o $a-b\cdot c$] posso interpretare la sottrazione come la somma di a e di $-b/c$ [quesito 3] e, grazie alla proprietà commutativa dell'addizione, scambiare i due termini a e $-b/c$. Posso perciò calcolare $-(b/c)+a$ [$-(b\cdot c)+a$]. Ossia battere: b [÷] c [=] [+/-] [+] a [=] .

Per calcolare $\frac{a}{b+c}$ non posso battere a [÷] b [+] c [=], che invece calcola $\frac{a}{b}+c$: il secondo termine della divisione è tutto $b+c$. Posso ricorrere al tasto [1/x].

Infatti posso interpretare la divisione come il prodotto di a per $1/(b+c)$ [quesito 4] e, grazie alla commutatività della moltiplicazione, scambiare i due termini a e $1/(b+c)$. Posso cioè calcolare $1/(b+c)\cdot a$, ossia battere: b [+] c [=] [1/x] [×] a [=] .

Nei casi precedenti potevamo anche usare il *tasto di memoria* e, ad esempio nell'ultimo caso, battere: b [+] c [=] [M+] a [÷] [MR] [=] .

Invece $a\cdot b+c\cdot d$ non si può trasformare in un termine che sia calcolabile a catena. Con una CT senza gerarchia devo usare il tasto di memoria. Ricorrendo al tasto di memoria posso, dopo aver eventualmente azzerato la memoria con [MC], battere: a [×] b [=] [M+] c [×] d [M+] [MR] .

Il tasto di memoria comanda alla CT di copiare o addizionare (a seconda del modello di CT o del tipo di tasto, come abbiamo già avuto modo di vedere) il numero che appare sul visore in un apposito registro. Questo registro, a diversità dei registri di lavoro, non è un dispositivo di memorizzazione gestito automaticamente dalla CT ma è azionato direttamente dall'utente. Per distinguerlo dalle memorie di lavoro lo chiameremo ***memoria-utente***.

Invece di a^b, se non voglio usare una scrittura "a due piani", posso scrivere a^b. Per convenzione, l'elevamento a potenza ha priorità rispetto a moltiplicazione e divisione: $2\cdot 5^2$, cioè 2·5^2, è da interpretare come $2\cdot(5^2)$, cioè 2·(5^2), non come $(2\cdot 5)^2$, cioè (2·5)^2. Le CT rispettano questa priorità?

11 Interpreta il comportamento della tua CT (o quella di un tuo compagno che sia dotata di [x^y]) di fronte all'esecuzione di 10·2^3, 10^2·3 e 10^2^3 (battendo i tasti nello stesso ordine dei segni di operazione · e ^), cioè cerca di capire qual è l'ordine in cui esegue le operazioni.

....

Le CT dotate di ***tasti parentesi*** consentono di calcolare 5/(1+3) direttamente, senza usare la memoria-utente o [1/x] . In genere si tratta di CT che hanno incorporata la priorità delle operazioni. Vediamo come può funzionare una CT di questo tipo.

tasti	*visore*	*interno*
[5]	5	
[÷]	5	5 /
[(]	5	5 / (
[1]	1	5 / (
[+]	1	5 / (1 +
[3]	3	5 / (1 +
[)]		5 / (1 + 3
	4	5 / 4
[=]	1.25	1.25

Dopo la battitura di [)] la CT non calcola 5/1 ma, essendo stato premuto [(] tiene in sospeso 5/.

Appena si batte [÷] la CT completa il calcolo di 1+3, visualizza il risultato 4 e, alla battitura di [=] , calcola 5/4.

12 Quale sequenza di tasti puoi impiegare per eseguire con una CT dotata di tasti di parentesi il seguente calcolo?

$$\frac{24}{8+4}-\frac{14}{7}$$

....

13 Riscrivi a "1 piano" i termini seguenti introducendo (*solo se necessario*) opportune parentesi.

$27+\frac{15}{4}$ → .... $27+\frac{15+2}{4}$ → .... 10^{2+3} → .... 10^2+3 → ....

Vediamo ora come si comportano le CT dotate di parentesi di fronte a calcoli più complessi. Se si batte:

2 [×] [(] 1 [+] 2 [×] [(] 1 [+] 1 [)] [)] [=]

possono visualizzare uno dei seguenti messaggi:

(1) *E* o *Error* o un lampeggìo (2) 10 (3) un altro numero

14 Quali CT completano "correttamente" il calcolo? La tua CT (o la CT dotata di parentesi di un tuo compagno) come si comporta? Quante operazioni devono essere in grado di tenere in sospeso le CT che completano "correttamente" il calcolo?

4. I numeri delle CT e la loro codifica interna

Di fronte al calcolo di **10/3** le CT possono dare risultati differenti. Ad esempio:

(1) 3.3333333 (2) 3.333333333

Le CT del tipo (1) visualizzano 8 cifre del risultato, quelle del tipo (2) ne visualizzano 10.

Di fronte al calcolo di **20/3** CT che visualizzino lo stesso numero di cifre, ad es. 8, possono dar luogo a *uscite* diverse:

(1) 6.6666666 (2) 6.6666667

Nel caso (1) il risultato viene ***troncato*** a 8 cifre, nel caso (2) viene ***arrotondato*** a 8 cifre. In questo secondo caso la CT deve conoscere almeno un'altra cifra del risultato: per stabilire se lasciare immutata l'8ª cifra o aumentarla di 1 deve sapere se la 9ª cifra è minore di 5 o no; per eseguire i calcoli deve quindi impiegare più cifre di quelle che compaiono sul visore.

15 Quali risultati forniscono CT del tipo (1) e CT del tipo (2) di fronte al calcolo di 1234+0.1234567?

Vediamo come si comporta una CT se si batte 10 [÷] 6 [+] 12345678 [−] 12345678 [=] .

Poiché 10/6=1.666… e aggiungere e togliere lo stesso numero 12345678 non dovrebbe modificare il risultato, con una CT che visualizza 8 cifre ci aspetteremmo di ottenere 1.6666666 o 1.6666667. Tuttavia ciò non accade, ma si possono ottenere ad esempio:

(1) [1] (2) [2] (3) [1.66] (4) [1.666] (5) [1.67]

16 Provate a eseguire questo calcolo con la vostra CT e osservate il risultato. Sapete spiegarvi come sia possibile che il risultato venga visualizzato con così poche cifre?

La CT del tipo (1) dopo il calcolo di 10/6 ha al suo interno 1.666… . Battuto [+] e 12345678, appena si batte [−] , la CT esegue la addizione operando solo con 8 cifre. In questo modo ottiene come risultato 12345679 (perdendo le cifre 666…, successive alla ottava). Da questo, quando l'utente batte 12345678 [=] , sottrae 12345678 dando come risultato finale 1.

```
          1.6666…
+ 12345678
----------------
  12345679.6666…
    ↓
  12345679
- 12345678
----------------
  00000001
```

La CT del tipo (2) rispetto a quelle del tipo (1) hanno l'unica differenza di eseguire le operazioni operando con più di 8 cifre, cioè nei registri di lavoro (e nella memoria-utente) possono conservare più cifre di quelle che appaiono sul visore. Quindi durante il calcolo di 1.666…+12345678 la CT non perde subito la 9ª cifra del risultato (il 6 dopo il punto decimale), con un confronto stabilisce che non è minore di 5 e, quindi, registra il risultato aumentando di 1 l'ottava cifra (12345679.6… → 12345680). La sottrazione di 12345678 dà quindi 2.

```
          1.6666…
+ 12345678
----------------
  12345679.6666…
    ↓
  12345680
- 12345678
----------------
  00000002
```

La CT del tipo (3) ha registri con 10 cifre e opera con 10 cifre.

17 Completa la spiegazione esaminando le CT dei tipi (4) e (5) e analizza il comportamento della tua CT.

```
          1.6666…
+ 12345678
----------------
  12345679.6666…
    ↓
  12345679.66
- 12345678
----------------
  00000001.66
```

Una CT con visore a 8 cifre se ottiene come risultato di un calcolo 0.00000000001 lo visualizza nella forma esponenziale 1E-11 ($1\cdot10^{-11}$) in quanto la sua scrittura per esteso richiederebbe troppe cifre. Analogamente se si calcola 12345678·12345678 sul visore si ha 1.5242E14, cioè la rappresentazione esponenziale di 152420000000000.

Il risultato è stato arrotondato a sole 5 cifre significative per far spazio all'esponente di 10 (altre CT troncano, altre visualizzano 6 cifre). Se si batte 1.2345678·1.2345678 si ha invece 1.5241577, cioè il risultato approssimato con 8 cifre significative.

[1.5242 14]

[1.5241577]

Nel caso di 12345678·12345678 anche nel registro di lavoro il risultato era approssimato solo a 5 cifre?

18 Batti 12345678 [×] 12345678 [=] sulla tua CT, annota il risultato e poi batti [÷] 1E14 [=], cioè dividi per 10^{14}. Il nuovo risultato ha la stessa quantità di cifre significative del risultato annotato?

Il fatto che si sia ottenuto 1.5241577, cioè un numero con il massimo numero di cifre visualizzabili dalla CT, significa che all'interno, a differenza di quanto accade sul visore, la registrazione dell'esponente non riduce lo spazio per la registrazione delle cifre significative.

Vediamo più in dettaglio come sono memorizzati i numeri in un registro di lavoro. Riferiamoci a una CT che approssima a 8 cifre significative. Il numero viene registrato in notazione scientifica (ossia nella forma $h \cdot 10^n$ dove h ha una sola cifra, diversa da 0, a sinistra del punto decimale e n è l'ordine di grandezza). Ad esempio il risultato di 12345678·12345678, viene interpretato come $1.5241577 \cdot 10^{14}$ e vengono memorizzati separatamente 1.5241577 (h) e 14 (n). La configurazione del registro che contiene questo numero è illustrata nella *figura 1*.

segno	mantissa								segno	esponente	
+	1	5	2	4	1	5	7	7	+	1	4

\ punto decimale sottointeso

figura 1
rappresentazione interna di $1.5241577 \cdot 10^{14}$

I numeri h e n vengono detti ***mantissa*** ed ***esponente*** della notazione scientifica. Oltre alle cifre della mantissa e dell'esponente vengono memorizzati i loro *segni* (nella figura li abbiamo indicati con "+" poiché sia mantissa che esponente in questo caso sono positivi).

19 Memorizza 1 miliardo e batti ripetutamente (almeno una dozzina di volte) [×] [MR]. Che cosa appare sul visore?
Batti 1 [÷] 1E98 [÷] 100 [=]. Che cosa ottieni?

Con il primo calcolo, dopo la visualizzazione di 1E99, alla successiva moltiplicazione compare un *messaggio d'errore.* Esso indica che c'è stato un ***overflow***, cioè uno "straripamento": il risultato di $10^{99}\cdot$ 1 miliardo eccede la capacità di memorizzazione della CT. La CT consente di rappresentare numeri che in notazione scientifica abbiano esponente al più pari a 99. Il massimo numero rappresentabile, detto ***infinito-macchina***, è dunque $9.999\ldots9 \cdot 10^{99}$.

Con il secondo calcolo, invece del risultato "corretto" 1E-100, viene visualizzato 0: quando un calcolo ha come risultato un numero positivo inferiore a 10^{-99} la CT lo memorizza come 0. Un fenomeno di questo genere viene chiamato ***underflow***. Fenomeni analoghi si verificano nel caso di risultati negativi.

20 Completa la seguente tabella:

+	9	9	9	9	9	9	9	9	+	9	9	$9.9999999 \cdot 10^{99}$	massimo numero macchina
+	1	0	0	0	0	0	0	0	–	9	9	$1.0000000 \cdot 10^{-99}$	minimo numero macchina positivo
													massimo numero macchina negativo
													minimo numero macchina

I ***numeri-macchina*** di una CT, cioè i numeri che essa è in grado di memorizzare, non soltanto hanno un *minimo* e un *massimo* entro cui devono variare, ma sono in *quantità finita*.

21 Eseguendo *a mano* ripetutamente l'operazione "·2" a partire da un numero qualunque ottengo via via un numero maggiore del precedente. In questo modo posso generare una quantità grande a piacere di numeri diversi. In maniera analoga eseguendo a mano ripetutamente l'operazione "/2" a partire da un qualunque numero positivo ottengo una quantità grande a piacere di numeri via via più piccoli. Che cosa accade se eseguo questi calcoli *con una CT*?

La possibilità di rappresentare internamente non un qualunque numero, ma solamente una quantità finita di numeri, è una caratteristica non solo delle CT, ma anche dei calcolatori di qualsiasi dimensione. Infatti un registro di lavoro o un qualsiasi altro dispositivo realizzato dall'uomo, essendo costituito da una quantità finita di componenti, può registrare solo una quantità finita di espressioni.

Vediamo un po' più in dettaglio come vengono memorizzati i numeri-macchina.

In una CT i registri di lavoro non sono di natura meccanica come accadeva per i contatori delle schede precedenti (sequenze di ruote che cambiavano posizione automaticamente sotto l'azione di ingranaggi e leve), ma sono costituiti da sequenze di particolari dispositivi, simili a interruttori, detti *flip-flop*, che, sotto l'azione di impulsi elettrici, possono assumere due sole posizioni.

Si tratta di dispositivi ***elettronici***: a differenza degli usuali interruttori (che presentano un braccio mobile che può collegare o sconnettere il filo in cui passa la corrente) non contengono parti meccaniche ma impiegano alcuni materiali che hanno la proprietà di cambiare la capacità di conduzione in seguito all'applicazione di una opportuna tensione elettrica (la parola "elettronico" trae origine dal fatto che le particelle cariche elettricamente il cui spostamento dà luogo alla corrente elettrica sono chiamate *elettroni*).

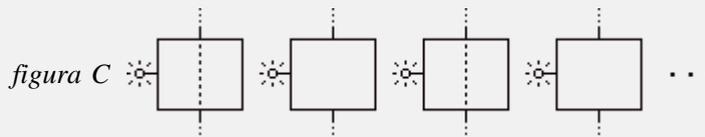
Il più noto di questi materiali, detti *semiconduttori*, è il silicio. Forse hai sentito parlare di *Silicon Valley* (la Valle del Silicio): non è una località da film western ma è una valle della California così soprannominata poiché vi sono nate molte fra le più importanti industrie del settore elettronico.

Un semiconduttore può essere trattato opportunamente in modo da assumere proprietà elettriche diverse, dette di tipo N e di tipo P. Se una stessa "fettina" di un semiconduttore viene trattata in modo da presentare uno strato con caratteristica P e uno con caratteristica N si ha che, applicando una tensione elettrica con una batteria:

- se lo strato P è "reso positivo" rispetto a N la corrente circola facilmente (*figura A*);
- se lo strato P è "reso negativo" rispetto a N il materiale si comporta come isolante (*figura B*).

Questo fenomeno spiega l'origine della parola "semiconduttore".

Un *flip-flop* è un dispositivo leggermente più complesso di quello raffigurato nella figura precedente, realizzato combinando, mediante collegamenti elettrici, più strati di semiconduttore opportunamente trattati. Grosso modo funziona così (*figura C*): attraverso successivi impulsi elettrici applicati su un apposito capo il flip-flop può passare dallo stato di conduttore allo stato di isolante, poi di nuovo a quello di conduttore, e così via.

figura C

Le CT, e più in generale i calcolatori, memorizzano le informazioni mediante flip-flop collegati elettricamente. Indicando con 0 e con 1 i due stati che può assumere un flip-flop, possiamo dire che le informazioni vengono codificate impiegando l'*alfabeto* 0, 1.

Questo è il motivo per cui, quando si ha a che fare con mezzi di calcolo elettronici, la quantità di informazione registrata, la capacità di memorizzazione di un dischetto, la ampiezza di un documento, … vengono misurate in ***bit***: i bit sono i simboli 0 e 1 con cui viene rappresentato il codice impiegato internamente dai dispositivi elettronici. La parola "bit" deriva dall'inglese *binary digit* (cifra binaria: cifra impiegata nella notazione numerica *binaria*, cioè a *due* cifre). Il vantaggio dei dispositivi di registrazione elettronici rispetto ai dispositivi meccanici (ruote dentate e simili) è quello di essere estremamente più piccoli (con opportune tecniche produttive in una piastrina grande quanto un'unghia possono essere realizzati circuiti elettrici contenenti migliaia di flip-flop) e più facili da produrre. I registri della CT che stiamo considerando nel nostro esempio sono organizzati nel modo illustrato nella *figura 2*.

+	1	5	2	4	1	5	7	7	+	1	4
1	0001	0101	0010	0100	0001	0101	0111	0111	1	0001	0100

figura 2

cifra decimale	*codifica in* BCD
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	
6	0110
7	
8	1000
9	

figura 3

I segni vengono codificati con 1 bit (0 il segno "–", 1 il segno "+") e ogni cifra viene codificata con 4 bit. Questa rappresentazione dei numeri viene chiamata *BCD*, che sta per "binary coded decimal": notazione decimale codificata con un alfabeto binario (*figura 3*).

22 Provate a descrivere un procedimento per generare in ordine le cifre in codice BCD e completate la tabella.

23 Quanti bit impiega la "nostra" CT per memorizzare un numero?

24 Come codifica internamente il numero 0.1 la nostra CT?

5. Altri tasti funzione - La radice quadrata

In una CT sono incorporati (memorizzati in opportuni dispositivi elettronici) programmi per eseguire le "quattro operazioni". Così come nel calcolo a mano possiamo utilizzare procedimenti diversi (la "conta" oppure le tabelline), per eseguire queste operazioni con le CT possono essere utilizzati programmi che traducono algoritmi diversi, più o meno veloci.

Ad esempio si può calcolare 27+65 attraverso incrementi unitari, oppure mediante l'algoritmo della somma in colonna; posso far avanzare il contatore che contiene 27 di 65 posizioni contate una per una (65 "scatti"), oppure posso:

– far avanzare di 5 posizioni il dispositivo in cui ho messo 7 (→ 8 → 9 → 0 → 1 → 2), e, poiché si è passati attraverso la posizione 0, incrementare di 1 il dispositivo in cui c'era 2 (→ 3) per tener conto del "riporto",

27
05
32

– far avanzare di 6 posizioni il dispositivo in cui ora c'è 3 (→ 4 → 5 → 6 → 7 → 8 → 9), arrivando così al risultato 92 con solo 12 "scatti".

32
60
92

Abbiamo anche visto (quesito 4) che se fosse incorporato un programma per calcolare il reciproco di un numero la CT potrebbe fare a meno di un programma specializzato nel calcolo delle divisioni: potrebbe utilizzare tale programma e quello per il calcolo delle moltiplicazioni. Viceversa potrebbe non avere un programma specializzato nel calcolo dei reciproci e calcolare il reciproco mediante un programma specializzato nel calcolo delle divisioni.

Comunque non ci preoccuperemo di analizzare in dettaglio questi aspetti. Ci limitiamo ad ammettere che le CT abbiano incorporati opportuni programmi per calcolare le "quattro operazioni", il reciproco e il cambio-segno; si tratterà di programmi più o meno simili agli usuali algoritmi per il calcolo con i numeri decimali limitati che abbiamo imparato nella scuola elementare.

Analogamente possiamo comprendere come possa funzionare il tasto [⊢] (o un tasto simile) presente su alcune CT, che opera nel modo seguente:

batto [170] premo [⊢] batto [18] premo [=] ottengo [9 R 8]
input *funzione* *input* *output*

Dati come input i numeri interi 170 e 18 vengono visualizzati due output:

– il risultato della divisione intera (cioè il troncamento agli interi di 170/18, che a volte viene indicato 170\18), cioè 9 (infatti 170 diviso 18 fa 9 e rotti)

– e (preceduto da una R) il relativo resto, cioè 8 (infatti prendendo 18 parti grandi 9 ottengo 162, e mi rimane ancora 170-162 = 8 da suddividere).

25 Senza eseguire a mano l'algoritmo della divisione (e senza usare l'eventuale tasto [⊢]) calcola con la CT il resto della divisione intera di 29523 per 137. Come hai proceduto?

Il tasto [⊢] calcola una funzione a 2 input e 2 output. A volte, invece che di funzione a 2 input e 2 output, a 2 input e 1 output, a 1 input e 1 output, … si parla di funzione a 2 *argomenti* e 2 *valori*, 2 argomenti e 1 valore, 1 argomento e 1 valore, … . Ad esempio la funzione cambio-segno è una funzione a 1 argomento e 1 valore.

x → ⊢ → x\y quoziente intero
y → → x − (x\y)·y resto

Come vengono calcolate le funzioni corrispondenti agli altri tasti? Senza preoccuparci di descrivere esattamente qual è il procedimento impiegato, vediamo come una CT potrebbe essere stata programmata in modo da effettuare il calcolo a partire dai procedimenti per eseguire le "quattro operazioni".

figura 4

Consideriamo il tasto [x^2]. Il calcolo della funzione $x \to x^2$ (che trasforma x in x^2) può essere realizzato componendo una funzione-duplicatore, cioè la funzione a 1 input e 2 output che preso un dato restituisce il dato stesso e una sua copia, e una moltiplicazione: → *figura 4*.

Più complicato è interpretare il funzionamento del tasto [x^y].

26 Provate a battere le seguenti sequenze di tasti e annotate i risultati ottenuti.

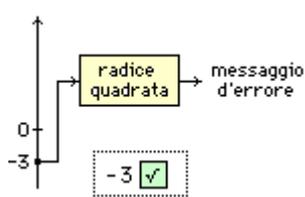
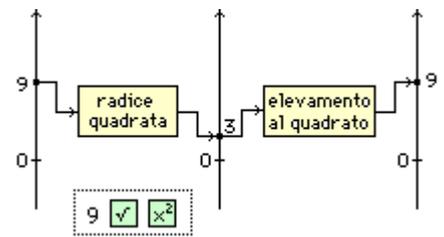
2 [x^y] 1 [+/–] [=]   2 [x^y] 2 [=]   2 [x^y] 2.7 [=]   2 [x^y] 3 [=]

Nel caso di potenze a esponente intero (come -1, 2 e 3) sappiamo che il calcolo può essere effettuato attraverso una sequenza di moltiplicazioni o di divisioni per la base a partire da 1: $1=2^0$, $1·2=2^1$, $1·2·2=2^2$, …, $1/2=2^{-1}$, $1/2/2=2^{-2}$, … . Basterebbe quindi impiegare il programma per eseguire la moltiplicazione o quello per eseguire la divisione e un contatore per tenere il conto delle volte che tale operazione è stata effettuata.

Nel quesito 26 abbiamo tuttavia visto che la CT esegue il calcolo anche nel caso in cui l'esponente non è intero: per 2.7 viene dato come risultato 6.4980192. Si tratta di un valore compreso tra $2^2= 4$ e $2^3= 8$ ma, a prima vista, non si riesce a comprendere come questo numero possa essere ottenuto a partire dagli input 2 e 2.7. Su questo problema ritorneremo più avanti, quando avremo messo a punto i concetti matematici che ci permetteranno di affrontarlo (nel quesito e7 vengono introdotti alcuni aspetti del problema).

Consideriamo il tasto [√]. Esso permette di calcolare la funzione ***estrazione della radice quadrata***.

Come sapete si tratta della funzione che a x associa il numero positivo (o nullo, se x=0) il cui quadrato sia x, cioè il numero y tale che $y^2 = x$ (è l'origine, la "radice", la provenienza del valore x, cioè il valore originale prima dell'elevamento al quadrato).

Infatti se, ad esempio, batto 9 [√] sul visore ottengo 3; se poi batto [x²] riottengo 9 (→ figura a fianco): 3 è il numero positivo il cui quadrato è 9.

Se invece batto –4 [√] sul visore compare un messaggio d'errore: non esiste alcun numero il cui quadrato faccia –4 in quanto la moltiplicazione di un numero per sé stesso non dà mai un risultato negativo. Possiamo dire che il termine $\sqrt{-4}$ è *indefinito*.

Analogamente ottengo un messaggio d'errore se batto 0 [1/x] o se batto 5 [÷] 0 [=] : il termine x/y è indefinito se y=0.

L'insieme degli input a cui una funzione f fa corrispondere un output viene detto ***insieme di definizione*** (o *dominio*) di f.

Nel caso della radice quadrata ($x \to \sqrt{x}$) il suo insieme di definizione è costituito dai numeri maggiori o uguali a 0. Nel caso del reciproco ($x \to 1/x$) l'insieme di definizione è costituito dai numeri diversi da 0. Nel caso della divisione ($x,y \to x/y$) è costituito da tutte le coppie di numeri x,y con y diverso da 0. L'insieme di definizione dell'elevamento al quadrato ($x \to x^2$) comprende invece tutti i numeri: x^2 è sempre definito.

27 Prova a eseguire i seguenti calcoli con la CT e: (1) stabilisci se il termine corrispondente è definito o indefinito, (2) scrivi (senza semplificazioni) tale termine:

2 [×] 0 [÷] 2 [=] ....   6 [÷] 3 [–] 2 [=] [M] 5 [+] 8 [÷] [MR] [=] ....

3 [–] 3 [=] [1/x] ....   6 [÷] 3 [–] 3 [=] [√] ....

Le CT non sempre calcolano esattamente la radice quadrata di un numero. Come di 10/3 le CT calcolano una approssimazione con una quantità finita di cifre, così nel caso ad esempio di $\sqrt{10}$ con una CT a 10 cifre ottengo 3.162277660, che non è la radice quadrata esatta di 10.

28 Perché 3.162277660 non è la radice quadrata esatta di 10?

Ma *una CT come può essere in grado di calcolare la radice quadrata di un numero* A, cioè di trovare il numero X che al quadrato faccia A (o trovare una sua approssimazione)?

Dovrà usare un procedimento meccanico, basato su operazioni elementari che la macchina è in grado di eseguire.

Per trovare una risposta proviamo a vedere come possiamo calcolare $\sqrt{A}$ sfruttando le quattro operazioni. Un'idea può essere quella di procedere per tentativi; consideriamo ad esempio A=5:

- proviamo con X=2; il suo quadrato X·X è 4; quindi 2 è troppo piccolo;
- proviamo con X=3; X·X=9; quindi 3 è troppo grande;
- proviamo prendendo X compreso tra 2 e 3; proviamo con X=2.1; X·X è 4.41 < 5; proviamo con X=2.2; X·X è 4.84 < 5; proviamo con X=2.3; X·X è 5.29 > 5; dunque X è compreso tra 2.2 e 2.3;
- proviamo con X=2.21; ... ; dunque X è compreso tra 2.23 e 2.24; **….**

Il procedimento che impiega una CT è simile. **Qui** ne trovi una descrizione più approfondita.

Questo procedimento, nel caso della radice quadrata di 5, dà luogo alla sequenza di uscite:

2, 2.2, 2.23, 2.236, 2.2360, 2.23606, 2.236067, 2.2360679, 2.23606797, 2.236067977, 2.2360679774, …

Nel caso della radice di 10 si ottengono: 3, 3.1, 3.16, 3.162, 3.1622, 3.16227, … . Nel caso della radice di 1000: 30, 31, 31.6, 31.62, 31.622, … . Nel caso di 0.1: 0.3, 0.31, 0.316, 0.3162, 0.31622, … .

29 Impiegando questo procedimento trova la radice quadrata di 0.4 troncata ai centesimi.

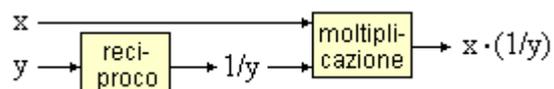
Eseguendo la moltiplicazione X·X a mano si può trovare la radice quadrata di un qualunque numero positivo A con quante cifre si vogliono. Ad esempio dopo aver trovato il troncamento di $\sqrt{5}$ a 16 cifre 2.236067977499789, potremmo trovare quello a 17 cifre eseguendo la moltiplicazione per sé stesso di 2.2360679774997891, poi eventualmente di 2.2360679774997892, …. Naturalmente per eseguire questa moltiplicazione impiegheremmo molto tempo, probabilmente faremmo vari errori, … . Comunque, *in via teorica*, disponendo di carta e penne a volontà, di pazienza e di una vita sufficientemente lunga, potremmo individuare una qualunque quantità finita di cifre di $\sqrt{5}$.

La CT, invece, ci fornirà soltanto una quantità fissata di cifre. Ad esempio ci potrebbe fornire come valore di $\sqrt{5}$ il suo troncamento (2.2360679) o il suo arrotondamento (2.2360680) a 8 cifre.

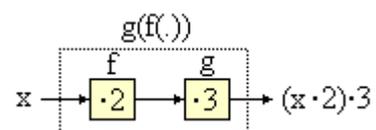
Comunque, in genere, è sufficiente conoscere una quantità piccola di cifre.

30 Un'officina deve realizzare una piastra di lamiera di forma quadrata che abbia area di 5 m^2. Gli strumenti con cui vengono tagliati i fogli di lamiera possono essere regolati utilizzando delle scale graduate che arrivano a rappresentare i decimi di millimetro. Qual è l'approssimazione di $\sqrt{5}$ che sarebbe sufficiente conoscere per realizzare la piastra?

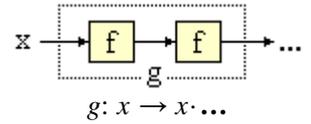
6. Composizione di funzioni - Funzioni inverse

Abbiamo visto, in §1, che, per calcolare x/y quando il tasto [÷] della CT non funziona, si può ricorrere ai tasti [1/x] e [×], componendo opportunamente la funzione reciproco (a 1 input e 1 output) e la funzione moltiplicazione (a 2 input e 1 output).

31 Cerca, nel §1, un grafo che rappresenti la composizione di due funzioni entrambe a 2 input e 1 output.

Ingrandisco un disegno con fattore di scala 2 e poi ingrandisco il nuovo disegno con fattore di scala 3. Posso rappresentare ciò con il grafo a fianco, in cui f è la funzione $x \to x\cdot 2$, g è la funzione $x \to x\cdot 3$ e $g(f(.))$ indica la funzione ottenuta ***componendo*** f e g, cioè $x \to g(f(x)) = (x\cdot 2)\cdot 3 = x\cdot 6$.

In questo caso sia f che g sono la moltiplicazione di un input variabile per un fattore costante, per cui vengono rappresentate con scatole in cui entra 1 sola freccia.

32 Una persona vuole ingrandire un disegno mediante una fotocopiatrice che ha una scala di ingrandimento fissa. Se la fotocopiatrice aumenta le dimensioni del 25% (cioè le moltiplica per 1+25/100 = 1.25), fotocopiando la fotocopia del disegno si ottiene un aumento totale delle dimensioni del 50%?

Siano f: $x \to x \cdot 1.25$ e g: $x \to f(f(x))$ (vedi disegno a lato). Esplicita il termine che esprime l'output di g.

g: $x \to x \cdot \ldots$

33 Una persona utilizzando una fotocopiatrice con scala di ingrandimento/riduzione variabile riproduce parte di una cartina geografica prestatale da un amico impiegando il fattore di scala 125%, cioè ingrandendola del 25%.

Successivamente, quando ormai non ha più a disposizione la cartina, si rende conto che con la fotocopia ingrandita non può più impiegare la comoda scala "1 cm = 1 km" della cartina originale. Decide allora di fotoridurre la fotocopia impiegando il fattore di riduzione 75%, cioè di ridurla del 25%. Così crede di riottenere le stesse dimensioni della cartina originale.

E` giusto il ragionamento che ha fatto?

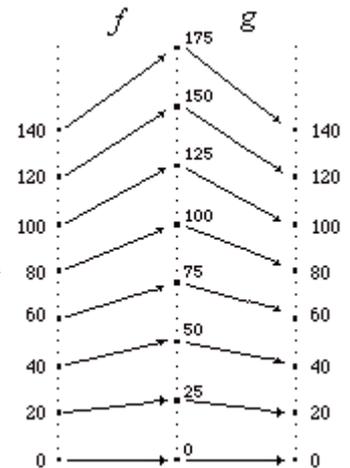
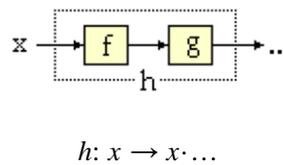
100 cm · fattore di ingrandimento = 100 cm · 125% = 100 cm · 1.25 = 125 cm
125 cm · fattore di riduzione = 125 cm · 75% = ...

Quale fattore di riduzione doveva applicare per riottenere 100 cm? (*Le statistiche*, scheda 1, fine §2)

34 Sia f la funzione $x \to x \cdot 1.25$, cioè sia $f(x) = x \cdot 1.25$.

Sia g la funzione $x \to x \cdot 0.8$, cioè sia $g(x) = x \cdot 0.8$.

Sia h la funzione composta illustrata a lato. Esplicita il termine che ne esprime l'output.

h: $x \to x \cdot \ldots$

[la figura adestra illustra la trasformazione di alcuni numeri mediante la applicazione di f e poi di g]

Abbiamo visto che applicando a un input la funzione f e poi la funzione g del quesito 34 – cioè applicando la funzione $g(f(.))$ – l'output ottenuto è uguale all'input. In altre parole $g(f(x))=x$, ossia $g(f(.))$ è la funzione $x \to x$.

35 Calcola $f(g(x))$ per alcuni valori di x a tua scelta e cerca di esplicitare il termine che esprime l'output per un generico input x:

$x \to$ ....

Due funzioni f e g vengono dette una ***funzione inversa*** dell'altra se applicando g a un output di f riottengo l'input che avevo dato a f e, viceversa, se applicando f a un output di g riottengo l'input che avevo dato a g: vedi figura a lato. Le funzioni $x \to x \cdot 1.25$ e $x \to x \cdot 0.8$ sono dunque una l'inversa dell'altra. Più in generale sono tali $x \to x \cdot k$ e $x \to x \cdot (1/k)$ (cioè $x \to x/k$).

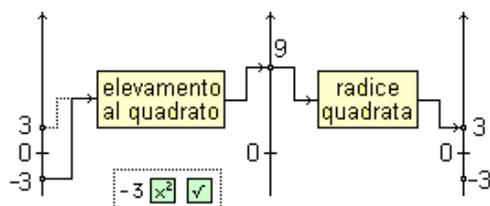
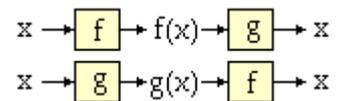



figura 5

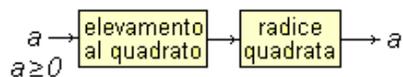
Se batto 9 [√] [x²] sul visore riottengo 9, se batto 3 [x²] [√] riottengo 3. *La radice quadrata* (§5) *è* dunque *la funzione inversa dell'elevamento al quadrato?*

Se batto –3 [x²] [√] non riottengo –3 (→ *figura 5*): calcolando la radice di 9 trovo 3, cioè il numero "positivo" y tale che $y \cdot y = 9$, non il numero negativo –3.

La funzione che si ottiene componendo elevamento al quadrato e radice quadrata associa ai numeri negativi i loro opposti (–3 →9 → 3) mentre lascia invariati gli altri numeri (3 → 9 → 3, 0 → 0 → 0).

Il numero che si ottiene come output viene chiamato ***valore assoluto*** del numero che si è dato come input. Quindi 3 e –3 hanno entrambi 3 come valore assoluto. Il valore assoluto di un numero x viene indicato $|x|$. Quindi: $|6.3| = |-6.3| = 6.3$.

Concludendo si può dire che l'elevamento al quadrato ha come funzione inversa la radice quadrata solo *se lo delimitiamo imponendo la condizione che i suoi input non siano negativi*: se come input prendo un numero $a \geq 0$, componendo l'elevamento al quadrato e la radice quadrata riottengo a.

a → [elevamento al quadrato] → [radice quadrata] → a
a ≥ 0

Molte CT impiegano lo stesso tasto per il quadrato e per la radice quadrata. Battendo direttamente il tasto viene calcolata la radice (o il quadrato, in alcune CT, come in quella "virtuale" presente in Windows), battendo prima un apposito tasto (INV o 2nd o f⁻¹ o …) viene calcolata la funzione inversa.

36 Siano F e G le funzioni così definite: F(x) = x·1.25 (ingrandimento del 25%), G(x) = x·0.8 (riduzione del 20%), già considerate nei quesiti 34 e 35. In *figura 6* sono riprodotte parti dei grafici (realizzate con Poligon) di tali funzioni e delle funzioni H=F(G(.)) e K=G(F(.)). Due dei 4 grafici si sovrappongono.

(**1**) Associa ad ogni grafico la (o le) funzioni corrispondenti.
(**2**) Come avresti potuto descrivere direttamente H e K senza ricorrere a F e G?
H(x) = … K(x) = …
(**3**) Che relazione intercorre tra la pendenza di F e la pendenza di G?

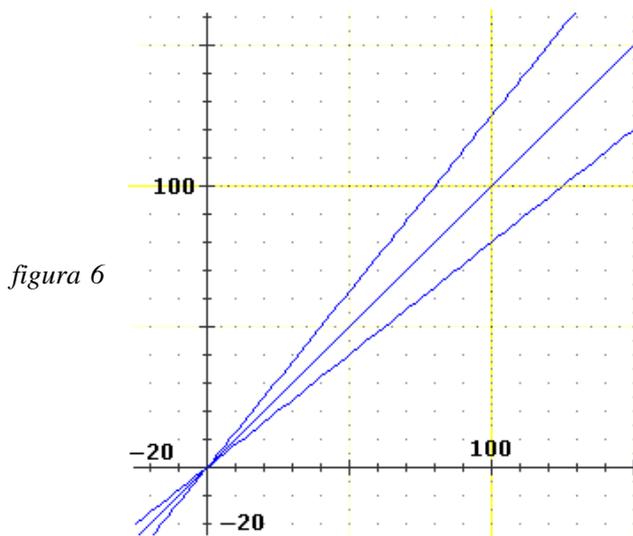



figura 6

37 In *figura 7* sono tracciati i grafici di due funzioni F e G. Sul grafico di F è stato evidenziato il punto (1.5, 2.25), che esprime il fatto che l'output di F corrispondente all'input 1.5 è 2.25.

x	H(x)	K(x)
0		
1		
–1		
2		
–2		
3		
–3		

(**1**) Evidenzia il punto che rappresenta quale output ha F se l'input è –1.5.

(**2**) Qual è l'output di G se l'input è 2.25, cioè qual è la radice quadrata di 2.25? Evidenzia il punto che esprime questa associazione.

(**3**) Siano H = F(G(.)) e K = G(F(.)). Calcola gli output di H e di K per gli input 0, 1, –1, 2, –2, 3, –3 (vedi tabella a fianco). Prova a esprimere H(x) e K(x) senza ricorrere a F e G.

H(x) = … K(x)=…

(**4**) Traccia i grafici di H e di K.

(**5**) Tracciando il grafico di F si è fatta variare x su tutto l'intervallo [-2,3]. Dove conviene farla variare per i grafici di G e H?

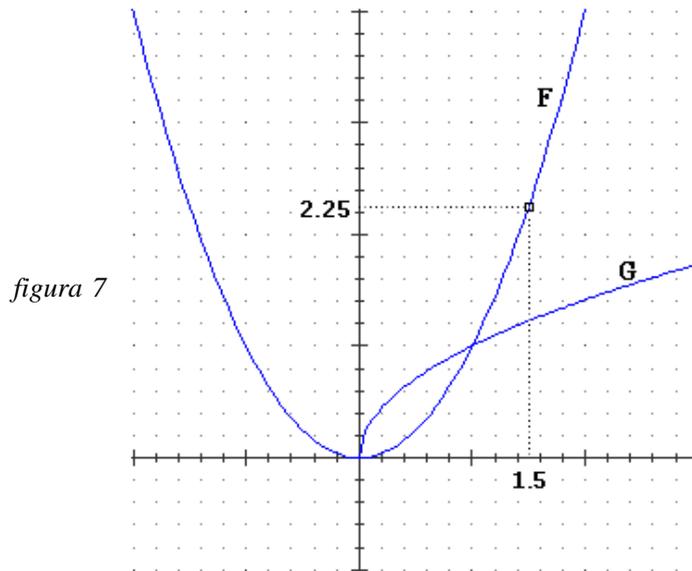
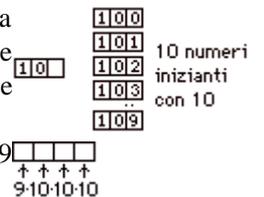



figura 7

7. Esercizi

e1 I numeri macchina positivi con ordine di grandezza *n* di una ipotetica CT dotata di registri con mantisse a due cifre vanno da $1.0 \cdot 10^n$ a $9.9 \cdot 10^n$. La prima cifra può andare da 1 a 9 (9 possibilità), la seconda da 0 a 9 (10 possibilità). Quindi questi numeri in tutto sono 9·10=90:

Se la CT registrasse 3 cifre si andrebbe da $1.00 \cdot 10^n$ a $9.99 \cdot 10^n$. Per ciascuna delle 9 possibili scelte della prima cifra avremmo 10 possibili scelte della seconda cifra. Per ciascuna delle 9·10=90 possibili scelte della prima coppia di cifre avremmo 10 possibili scelte per la 3a cifra (a lato sono raffigurate le 10 mantisse aventi 1 e 0 come prima coppia di cifre). Quindi questi numeri sono 9·10·10

Analogamente le possibili mantisse di una CT a 4 cifre sono 9·10·10·10 (9 possibilità per la prima cifra, 10 per le altre).

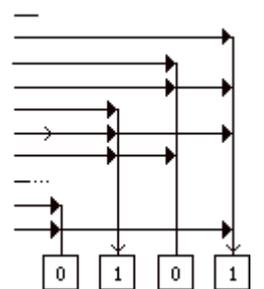
L'esponente *n* è un numero intero che può andare da -99 a 99, cioè può assumere 199 valori diversi.

Quindi una CT con registri a 4 cifre di mantissa (e 2 di esponente) ha 9000 numeri macchina positivi per ognuno dei 199 ordini di grandezza possibili, cioè 199·9000 numeri macchina positivi. A questi sono da aggiungere altrettanti numeri negativi e il numero 0.

Quindi questa CT ha 199·9000·2+1 = 3 582 001 numeri macchina.

Quanti sono i numeri macchina della CT considerata nella figura 1?

e2 Lo schema a lato dà un'idea di come sia realizzabile tecnologicamente la codifica binaria delle cifre decimali battute dalla tastiera di una CT. I quadratini in basso rappresentano i 4 flip-flop con cui viene memorizzata la cifra decimale battuta. I triangolini neri rappresentano i raccordi tra tratti orizzontali e tratti verticali: consentono alla corrente di passare dal tratto orizzontale al tratto verticale, ma non viceversa.

Inizialmente i flip-flop sono in stato 0. Se in corrispondenza di "5" invio un impulso questo (seguendo i tratti indicati dalle frecce) raggiunge il 1° e 3° (da destra) flip-flop, cambiandone lo stato. Se invece batto "0" non arriva alcun impulso elettrico ai flip-flop, che rimangono tutti in stato 0.

Completa lo schema in modo da illustrare anche la codifica di "7".

e3 La calcolatrice allegata simula il funzionamento di una calcolatrice. **Verifica** con degli opportuni esempi (che dovrai riportare e commentare) se essa ha o no la priorità delle operazioni. Quindi:

(**a**) Usala per rivedere gli esempi considerati nella scheda (in particolare quelli di §2 e di §4).

(**b**) Qual è il massimo numero intero a cui può essere elevato 10 prima di arrivare all'overflow?

(**c**) Che cosa si ottiene se a partire da 10 si batte ripetutamente il tasto di estrazione di radice quadrata?

e4 Ciascuno dei due schemi a fianco rappresenta la composizione di due funzioni f e g.

Scegliendo tra: $x \to x+5$, $x \to x\cdot 2$, $x \to x^3$, stabilisci che cosa sono f e g nei due casi.

schema A f: x → … g: x → …
schema B f: x → … g: x → …

e5 Completa gli schemi a fianco dando il nome giusto (f o g) a ciascuna "scatola", sapendo che:

f: $x \to 3+x$ g: $x \to x^2$

e6 Completa gli schemi a fianco dando il nome giusto (f o g) a ciascuna "scatola", sapendo che:

f: $x \to 3\cdot x$ g: $x \to 2\cdot x + 1$

e7 Per calcolare l'elevamento al quadrato mediante una CT invece del tasto di funzione a 1 argomento [x^2] potrei usare (oltre che [×]) il tasto di funzione a 2 argomenti [x^y], anche se, ovviamente, in questo modo dovrei battere più tasti e occupare più registri di lavoro della CT.

(**a**) Come potrei impiegare [x^y] in alternativa al tasto [$1/x$]?

(**b**) Prova a battere 2 [x^y] 0.5 [=] e confronta il risultato con quello della battitura di 2 [$\sqrt{\ }$]. Ripeti la prova con numeri diversi da 2. Che cosa puoi ipotizzare circa il valore di $a^{0.5}$?

(**c**) Sappiamo che $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ se m e n sono numeri interi [*Potenze (1)* in *Gli oggetti matematici*]. Se vogliamo che questa equazione sia vera anche quando m e n non sono interi, dobbiamo avere in particolare: $a^{0.5} \cdot a^{0.5} = a^1 = a$. Come puoi collegare questa conclusione con quanto visto in (b)?

(**d**) Una persona vuole costruire una cisterna di forma cubica che abbia il volume di 10 m^3. Sapendo che il volume del cubo è *lato·lato·lato*, cioè $lato^3$, la persona per trovare la misura in metri dello spigolo della cisterna si propone di calcolare il numero che elevato alla 3ª faccia 10. Per far ciò, utilizzando una CT, batte 10 [x^y] 3 [$1/x$] [=], ottenendo sul visore 2.1544347. Conclude che lo spigolo della cisterna deve misurare 2 m e 15 cm. Prova a motivare il procedimento impiegato da questa persona. [traccia: usa il fatto che $a^m \cdot a^m \cdot a^m = a^{m+m+m}$ con $m = 1/3$]

e8 Qui sotto sono riprodotti parzialmente 3 grafici.

(**a**) Quali dei tre grafici rappresentano delle funzioni a 1 input e 1 output, cioè in quali casi ad ogni x corrisponde al più un y?

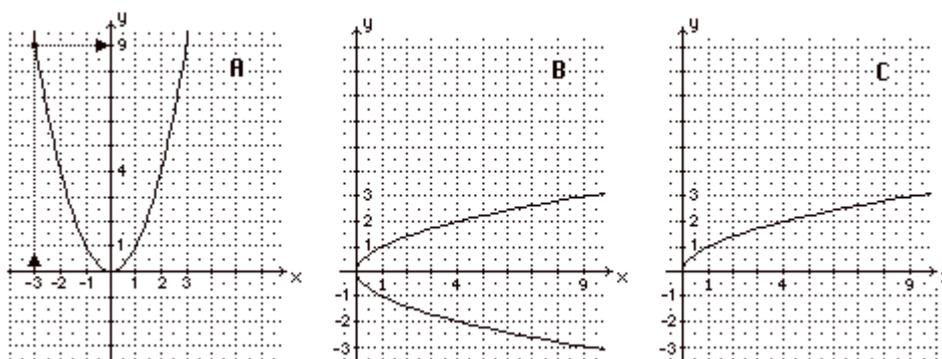
(**b**) I tre grafici rappresentano le relazioni indicate a fianco. Associa ad ogni relazione il grafico corrispondente.

(1) $x = y^2$

(2) $y = x^2$

(3) $x = y^2$, $y \geq 0$

(**c**) Quale tra le precedenti relazioni può essere scritta nella forma $y = \sqrt{x}$?

(**d**) Qual è l'insieme di definizione delle due relazioni che sono anche funzioni $x \to y$?

e9 Puoi ottenere la figura B del quesito e8 come grafico di un'unica funzione? Usa opportunamente Poligon (o un altro programma) per ottenere tale figura.

e10 Usa Poligon (o un altro programma) per tracciare il grafico della funzione *identità* (F(x)=x, funzione che restituisce l'input identico a come è entrato), il grafico della funzione *reciproco* (G(x)=1/x) e il grafico della funzione *cambio-segno* (H(x)=–x) [scegli un sistema di riferimento monometrico].

Se uno di questi grafici passa per il punto (x,y), secondo te passa anche per il punto (y,x)? [prova con qualche esempio]

e11 La funzione reciproco e la funzione cambio-segno hanno la proprietà di coincidere con la loro funzione inversa». Prova a spiegare e motivare questa affermazione.

e12 Usando Poligon (o un altro programma), traccia i grafici di F e G nei casi seguenti e prova a concludere se F(x) e G(x) sono termini equivalenti. [Poligon interpreta ABS e R2 come simboli delle funzioni valore assoluto e radice quadrata]

(**a**) F(x) = Abs(x) G(x) = R2(x^2)
(**b**) F(x) = Abs(x) G(x) = Abs(-x)
(**c**) F(x) = Abs(x+2) G(x) = Abs(x)+2
(**d**) F(x) = (x+1)*x G(x) = x*x+x
(**e**) F(x) = 3/x*x G(x) = 3/x^2
(**f**) F(x) = (3/x)^2 G(x) = 3/x^2

e13 Consideriamo l'operazione di composizione di funzioni, cioè quella che prese due funzioni F e G le trasforma nella ***funzione composta*** G(F(.)) ("G di F") che a x associa G(F(x)): trasforma x con F e poi applica G (per questo la funzione viene letta anche come "F composto G").

Si tratta di un'operazione commutativa, cioè "G composto F" è uguale a "F composto G"?

e14 Nel sistema di riferimento seguente sono stati tracciati:

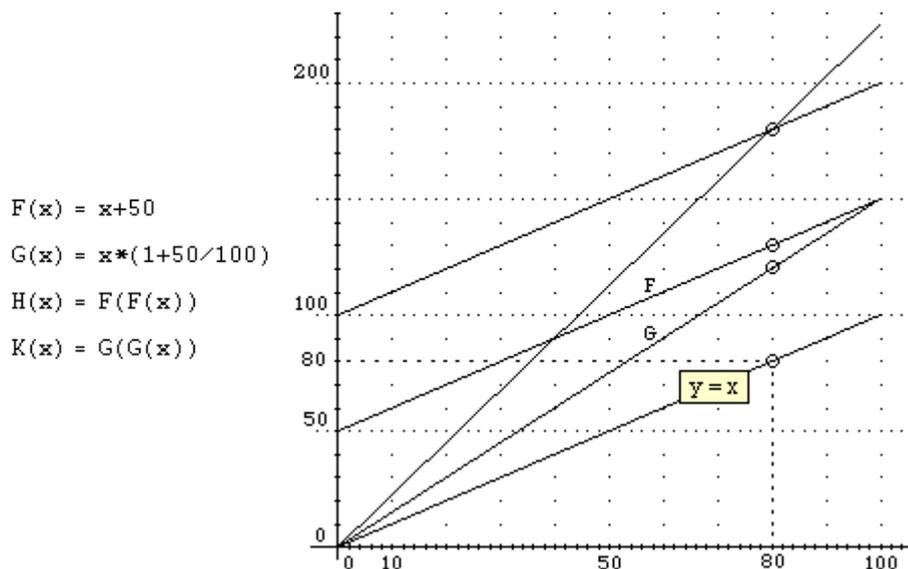
– il grafico della relazione y=x, cioè della funzione che a ogni input x associa un output uguale. Ad esempio a 0 associa 0, a 80 associa 80, a 100 associa 100;

– il grafico della funzione F che aumenta l'input di 50: x → x+50; ad esempio F a 0 associa 50, a 80 associa 130, a 100 associa 150;

– il grafico della funzione G che aumenta l'input del 50%: x → x·(1+50/100); x viene moltiplicato per 1 e 1/2; ad esempio G a 0 associa 0, a 80 associa 80+40=120, a 100 associa 100+50=150;

– il grafico della funzione H che applica all'input due successivi aumenti di 50, cioè: x → F(F(x));

– il grafico della funzione K che applica all'input due successivi aumenti del 50%, cioè: x → G(G(x)).

Cercate di associare a H e a K i due grafici che, nella figura, sono ancora senza "nome" e spiegate il ragionamento che avete svolto per arrivare alla risposta.

1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini:

proprietà commutativa (dopo ques.6), *registro di lavoro* (§2), *memoria-utente* (§3), *mantissa* (della notazione scientifica) (dopo ques.18), *numeri macchina* (§4), *insieme di definizione* (prima di ques.27), *composizione di funzioni* (§6), *funzione inversa* (dopo ques.36), *valore assoluto* (dopo ques.36).

2) Su un foglio da "quadernone", nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").

Le statistiche

Alcuni modelli per la rappresentazione dei dati

Scheda **3**

Lo sviluppo corporeo

0. Introduzione

«Giovanni è basso», «Maria è troppo alta», … . A volte sono semplici osservazioni, altre volte sono giudizi un po' maligni. Ma … che cosa vuol dire "basso", che cosa vuol dire "alta"? In base a quale valutazione riusciamo a distinguere quando una persona è alta, bassa o di altezza normale?

Sicuramente siamo in grado di esprimere con un numero l'altezza di una persona («Giovanni è alto 155 cm»). C'è un modello matematico che ci permetta di stabilire quando l'altezza di una persona è normale? Non si può rispondere nettamente con un "sì" o con un "no". Possiamo tuttavia affermare che la matematica ci permette di affrontare la questione e di metterne in luce la complessità. *Questa scheda* sarà dedicata a questo argomento.

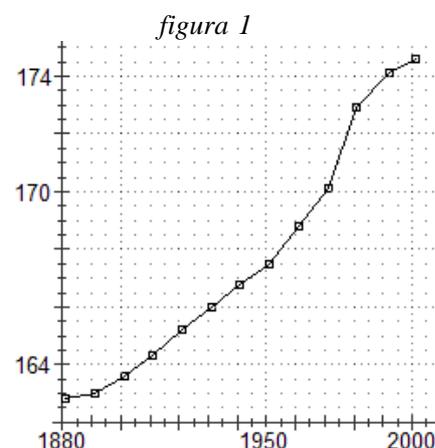
Vedremo che non può esistere una definizione assoluta di "normalità" ma che esistono degli strumenti matematici per valutare la relazione tra l'altezza di una persona e quella del complesso delle altre persone e, più in generale, per valutare la relazione tra un particolare aspetto di un certo oggetto (ad esempio il peso di un uovo) e il modo in cui tale aspetto si manifesta nella collettività di cui quell'oggetto fa parte (ad esempio il complesso delle uova prodotte dall'allevamento da cui l'uovo considerato proviene).

1. Istogrammi di distribuzione

Abbiamo già visto (scheda 1, §5) che per rappresentare con un unico numero come si manifesta un fenomeno collettivo si può ricorrere alla media aritmetica dei dati relativi ai singoli soggetti.

Il grafico di *figura 1* riporta la *altezza media dei maschi ventenni italiani* in vari anni, nel corso di più di un secolo.

figura 1

1 Nel 1881 l'altezza media dei maschi ventenni era di 162.8 cm, nel 1981 era di 172.9 cm. Qual è stato l'aumento medio annuo in questo intervallo di tempo? .... mm/anno

In cent'anni l'altezza media è aumentata più di 10 cm. La crescita è stata particolarmente rapida negli anni 70, cioè per gli uomini nati negli anni 50 e che hanno trascorso la loro infanzia negli anni della ripresa e dello sviluppo economico che sono seguiti alla seconda guerra mondiale (dal 1971 al 1981 vi è stato un aumento medio di 2.7 mm/anno). Negli ultimi anni la crescita tende a rallentare; probabilmente si stabilizzerà, centimetro più centimetro meno, intorno ai 175 cm. Un fenomeno analogo (forte crescita nel XX secolo, con rallentamento negli ultimi decenni) si è verificato in tutti i paesi industrializzati, anche tra le donne.

L'aumento dell'altezza media è dovuto essenzialmente al miglioramento delle condizioni di vita, soprattutto nell'alimentazione (per ricordare alcuni dati, nel 1880 l'"italiano medio" ha consumato 15 kg di carne, 29 nel 1960 e 54 nel 1970), ma anche nell'assistenza sanitaria e nell'attività fisica (si pensi all'elevamento dell'obbligo scolastico e alla progressiva riduzione del fenomeno del lavoro minorile): questi miglioramenti hanno fatto sì che i bambini e gli adolescenti abbiano avuto sempre più modo di sfruttare al massimo le potenzialità di crescita presenti nel patrimonio genetico ereditato dai genitori. Il miglioramento nell'assistenza sanitaria ha inciso su questo aumento anche in altri modi; ad es. le donne longilinee un tempo incontravano più difficoltà nel parto e quindi mediamente avevano meno figli; pian piano questo "svantaggio" è stato colmato ed è aumentata la trasmissione del patrimonio genetico da parte delle donne più alte.

2 Abbiamo dunque visto un primo aspetto che rende *relativo* il significato di "essere basso": l'altezza media è variata nel tempo. Un maschio nato nel 1941 (cioè ventenne nel '61) e alto 165 cm di quanto è sotto all'altezza media dei suoi coetanei? .... E un maschio della stessa altezza nato nel 1972? ....

Ma non basta calcolare la distanza dell'altezza di una persona dall'altezza media. Bisogna anche vedere se, ad esempio, sono molte o sono poche le persone nate nel 1972 e con altezza inferiore di 9 o più centimetri rispetto all'altezza media. Per fare questa valutazione possiamo riferirci agli istogrammi della *figura 2*, che rappresentano le percentuali dei ventenni maschi le cui altezze cadono in alcuni intervalli di misure.

Questi istogrammi sono stati realizzati impiegando dati pubblicati dall'Istat e già classificati negli intervalli di altezza indicati:

– altezze fino a 149 cm, altezze da 150 a 154 cm, …, altezze da 180 cm in su, per il 1881 e il 1961;

– altezze fino a 159 cm, altezze da 160 a 164 cm, …, altezze da 190 cm in su, per il 1992.

Gli istogrammi man mano si sono spostati verso destra, ma hanno mantenuto più o meno la stessa forma. Ciò visualizza il fatto che le diversità genetiche all'interno della popolazione si sono mantenute e che il miglioramento delle condizioni di vita ha fatto sì che tutti, ciascuno con le potenzialità ereditate, svilup-passero maggiormente l'altezza.

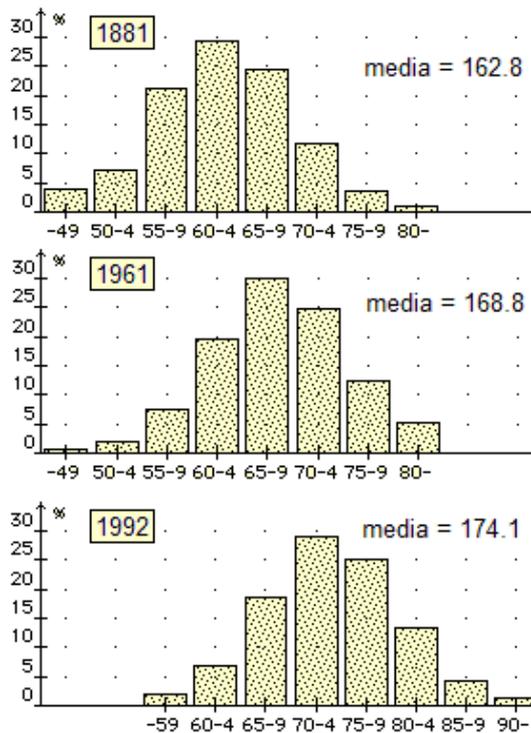
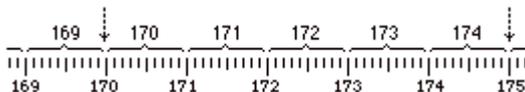



figura 2

3 L'intervallo di altezze più *frequente* (cioè in cui cade la maggiore percentuale di misure di altezza) nel 1881 è 160-164 cm. Quali sono quelli degli altri anni? 1961 .... 1992 ....

In figura 2 con "170-174" abbiamo indicato l'intervallo di misure i cui valori troncati ai centimetri sono 170, 171, 172, 173 o 174, cioè le misure che vanno da 170.0… cm a 174.9… cm.

Nel disegno a fianco sono i valori che cadono tra le due frecce, cioè i valori maggiori o uguali a 170.000… e minori di 175.000….

169 170 171 172 173 174
169 170 171 172 173 174 175

Quando di un ***intervallo*** di valori numerici si vogliono descrivere esattamente gli estremi si usano scritture come la seguente: [170,175). Essa indica l'insieme dei numeri che sono maggiori o uguali a 170 e che sono minori di 175; cioè l'insieme dei numeri x tali che $170 \le x < 175$.

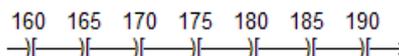
Si usa anche la scrittura: 170 ●—○ 175; il pallino pieno [vuoto] indica che l'estremo è [non è] compreso.

Nel caso in cui avessimo voluto includere 175 avremmo scritto [170,175] o 170 ●—● 175.

4 (**a**) Come rappresenteresti l'insieme dei numeri x tali che $170 < x \le 175$? ....
(**b**) e l'insieme dei numeri x tali che $14 < x < 17$? ....
(**c**) Come completeresti questa frase "l'insieme dei numeri x tali che …" in modo da descrivere l'intervallo rappresentabile con [4.1, 4.3]? ....
(**d**) e in modo da descrivere l'intervallo rappresentabile con (4.1, 4.3]? ....
(**e**) Se 48 cm è la lunghezza *arrotondata* ai centimetri di un oggetto, in quale tra i seguenti intervalli puoi concludere che cade la lunghezza "esatta"? ....
(48, 49] (47.5, 48.5) [48, 49) [47.5, 48.5) (47, 48]

Tornando a figura 2, *come sono state ottenute le percentuali rappresentate mediante gli istogrammi*?

Le altezze dei ventenni sono state classificate negli intervalli raffigurati a fianco.

160 165 170 175 180 185 190

Il termine ***classificare*** in questo caso non significa "mettere in graduatoria, assegnare un posto della classifica", ma significa "ripartire in *classi* (cioè collezioni, insiemi, aggregati, …) opportunamente definite". Le classi in cui vengono distribuiti i dati vengono spesso chiamate anche ***modalità***.

Per fare un altro esempio, se si volesse fare una statistica sul quartiere di provenienza degli alunni di una scuola, le modalità sarebbero i vari quartieri.

Il numero delle altezze che cade in un certo intervallo viene chiamato frequenza di quell'intervallo. Nel caso dell'indagine sulla provenienza degli alunni la frequenza di un quartiere è il numero degli alunni che proviene da esso. Più in generale, se considero un certo insieme di "oggetti" (ventenni, alunni di una scuola, …) e per ciascuno di essi raccolgo una particolare informazione (altezza, quartiere di provenienza, …), la ***frequenza*** di una modalità è il numero delle informazioni che vengono classificate in quella modalità o, in altre parole, è il numero delle volte che quella modalità si manifesta.

alunno	*sport*	*alunno*	*sport*
Anna	tennis	Giorgio	pallacanestro
Barbara	nessuno	Irene	salto in alto
Bruno	calcio	Laura	pallavolo
Carlo	ping-pong	Luciano	nessuno
Clara	calcio	Manuela	tennis
Dario	nuoto	Nicola	calcio
Davide	pallavolo	Paola	nessuno
Elena	nessuno	Roberta	judo
Enrico	judo	Sabina	pallacanestro
Fabrizio	nessuno	Valerio	pallanuoto

5 Nella tabella a fianco per ogni alunno è indicato lo sport maggiormente praticato. Classifica queste informazioni secondo le quattro modalità indicate nella tabella sotto a sinistra: in ogni casella scrivi (in piccola dimensione) i nomi degli alunni che verificano sia la proprietà "orizzontale" che la proprietà "verticale".

Indica, quindi, le corrispondenti frequenze nella tabella a destra, calcolando anche i totali per riga e per colonna.

Classificazione:

	fare uno sport praticabile in squadra	*non* fare uno sport praticabile in squadra
fare uno sport praticabile individualmente		
non fare uno sport praticabile individualmente		

Frequenze:

	fare …	*non* …	*totale*
fare …			
non …			
totale			20

Dopo aver classificato i dati e stabilito la frequenza delle varie modalità, per calcolare le percentuali rappresentate in istogrammi come quelli di fig. 2 ogni frequenza viene divisa per il numero totale dei dati.

Nel caso di fig. 2 la frequenza di ogni intervallo è stata divisa per il numero totale dei ventenni ed espressa in forma percentuale.

Un rapporto di questo genere, cioè il rapporto tra la frequenza di una modalità e il numero totale delle informazioni classificate, viene chiamato ***frequenza relativa***; infatti non esprime direttamente il numero delle volte con cui la modalità si è verificata ma lo "relativizza", ne esprime la relazione quantitativa con il totale delle informazioni classificate. Quando la frequenza relativa è espressa in forma percentuale essa viene chiamata anche *frequenza percentuale*.

Nel caso della provenienza degli alunni dire che per il quartiere X si è ottenuta una frequenza relativa del 29% significa che il rapporto tra gli alunni provenienti da X e il totale degli alunni è 0.29.

Per meglio distinguerla dalla frequenza relativa, la frequenza (non relativizzata) viene spesso chiamata ***frequenza assoluta***.

frequenza assoluta di una modalità = quantità delle informazioni che vengono classificate in tale modalità

$$\textit{frequenza relativa} \text{ di una modalità} = \frac{\text{frequenza assoluta di tale modalità}}{\text{totale delle informazioni classificate}}$$

6 (**a**) Qual è la frequenza relativa della modalità "fare uno sport praticabile sia in squadra che individualmente" di cui al quesito 5? (esprimila in forma percentuale) ....
(**b**) Qual è la frequenza relativa dell'intervallo di altezze (in cm) [165,170) nel 1961 (fig. 2)? ....

Una tabella che associ ad ogni modalità le corrispondenti frequenze con cui si manifesta un certo fenomeno viene detta ***distribuzione di frequenza*** (o più semplicemente *distribuzione*) di quel fenomeno (rispetto alle modalità scelte).

Ad esempio la *tabella (1.1)* è la distribuzione di frequenza degli sport praticati dagli alunni del quesito 5 rispetto alle modalità indicate (*I* sta per "praticabile **i**ndividualmente", *S* sta per "praticabile a **s**quadra").

La *tabella (1.2)* è la distribuzione di frequenza delle altezze degli italiani maschi ventenni nel 1992 rispetto agli intervalli indicati. Per essere più precisi nel questo caso dovremmo parlare di *distribuzione di frequenza relativa* o di *distribuzione percentuale*.

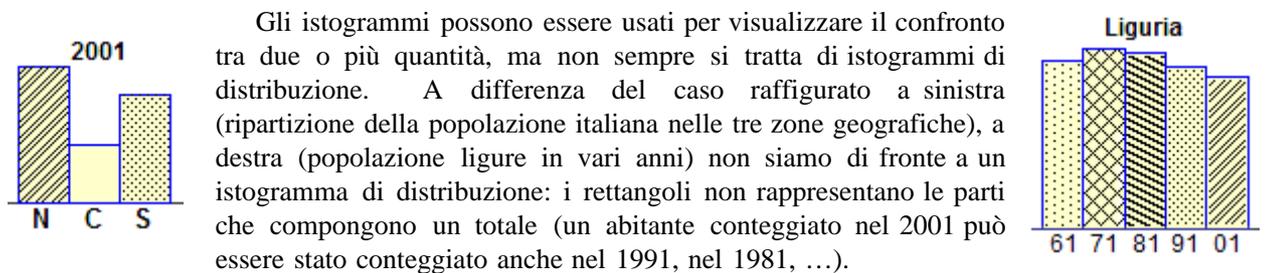
Gli istogrammi di figura 2 vengono quindi chiamati ***istogrammi di distribuzione*** (*percentuale*).

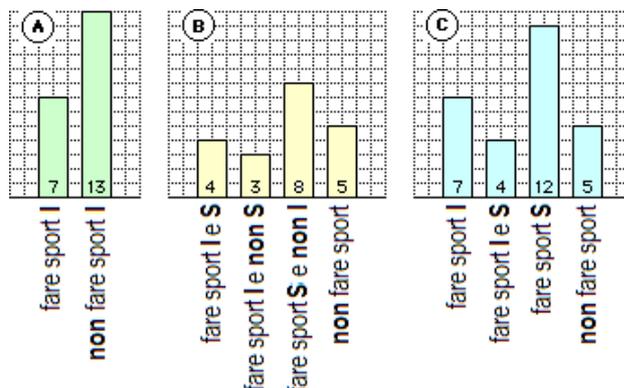
(**1.1**)	sport che è sia I che S	sport che è I ma non S	sport che è S ma non I	nessuno sport
frequenza	4	3	8	5

(**1.2**)	[0,160)	[160,165)	[165,170)	[170,175)	[175,180)	[180,185)	[185,190)	[190,∞)
freq. relativa	2%	7%	18%	29%	25%	13%	5%	1%

Il simbolo "∞" (che si legge "*infinito*") impiegato per l'ultimo intervallo indica una quantità infinita, cioè [190,∞) rappresenta l'intervallo costituito da tutti i numeri maggiori o uguali a 190.

Anche gli istogrammi relativi ai consumi impiegati nella scheda 1 sono istogrammi di distribuzione: gli "oggetti" sono le lire o euro spesi in consumi, le "informazioni" sono i beni o i servizi per cui le varie lire sono state spese, le modalità sono le categorie di beni e di servizi considerate.

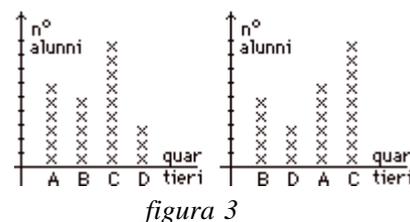
Si parla di istogrammi di ripartizione (o distribuzione) assoluta dei consumi se sulla scala verticale sono rappresentati i dati assoluti , di istogrammi di ripartizione percentuale se sono rappresentate le percentuali.

Gli istogrammi possono essere usati per visualizzare il confronto tra due o più quantità, ma non sempre si tratta di istogrammi di distribuzione. A differenza del caso raffigurato a sinistra (ripartizione della popolazione italiana nelle tre zone geografiche), a destra (popolazione ligure in vari anni) non siamo di fronte a un istogramma di distribuzione: i rettangoli non rappresentano le parti che compongono un totale (un abitante conteggiato nel 2001 può essere stato conteggiato anche nel 1991, nel 1981, …).

7 Quali (o quale) dei tre istogrammi a fianco (vedi quesito 5 e tabella 1.1) sono istogrammi di distribuzione, cioè in quali casi l'area complessiva dei rettangoli rappresenta un *totale* e le aree dei vari rettangoli rappresentano parti disgiunte (= "senza elementi in comune") del totale?

2. Media, moda, mediana

Tra la distribuzione delle altezze e quella delle zone di provenienza degli alunni vi è una diversità di fondo. In un caso abbiamo *modalità di tipo numerico* (valori numerici che vengono classificati in intervalli di numeri), nell'altro no (località che vengono classificate in quartieri).

Nel primo caso quindi sull'istogramma le modalità devono essere rappresentate con un certo ordine, nel secondo caso l'ordine non è particolarmente significativo: i due istogrammi di distribuzione di frequenza assoluta della *figura 3* possono essere considerati equivalenti.

Inoltre, mentre nel primo caso ha senso parlare di media aritmetica dei dati, nel secondo non ha senso parlare di quartiere medio di provenienza. In entrambi i casi si può considerare la modalità più frequente. Essa viene detta ***moda*** o ***classe modale***. Nel caso dei quartieri di provenienza la moda è il quartiere C. Nel caso delle altezze abbiamo già individuato le classi modali nel quesito 3.

figura 3

8 Nel caso della distribuzione rappresentata dalla tabella (1.1) trova, se è possibile, la moda e la media aritmetica.

Nelle *situazioni*, come quella delle altezze, *in cui le modalità sono numeri o intervalli numerici*, la moda indica un *valore medio*, così come la media aritmetica, cioè un valore (o un intervallo di valori) che riassume, caratterizza quantitativamente il modo complessivo in cui si è manifestato il fenomeno in questione. Ad esempio per il 1992 possiamo dire (esprimendosi in cm) sia che l'altezza media dei ventenni era di 174.1, sia che la classe modale è [170,175) (vedi figura 2).

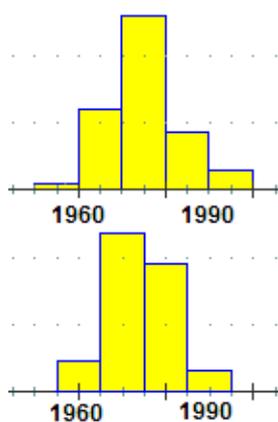



figura 4

A differenza della media, la *moda* (e più in generale la forma dell'istogramma) non *dipende* solo dai dati ma anche dalla *scelta degli intervalli* in cui classificare i dati. Ad es. in *fig. 4* sono riportati due istogrammi della distribuzione percentuale delle altezze dei ventenni nel 1992 alternativi a quello di fig. 2.

9 Nella *tabella (2.1)* sono riportate le altezze (arrotondate ai cm) delle 19 alunne diciassettenni di una scuola. I dati sono riportati secondo l'ordine alfabetico dei nomi delle alunne (al posto dei nomi delle alunne abbiamo indicato il numero d'ordine).

Qual è la moda se si prendono come modalità direttamente le misure in centimetri (cioè i valori: … , 150, 151, … , 169, 170, …)?

Qual è prendendo come modalità gli intervalli: 150-154, 155-159, … ?

E se si prendono gli intervalli 150-152, 153-155, … ?

(aiutati tracciando su carta quadrettata istogrammi simili a quelli di figura 3)

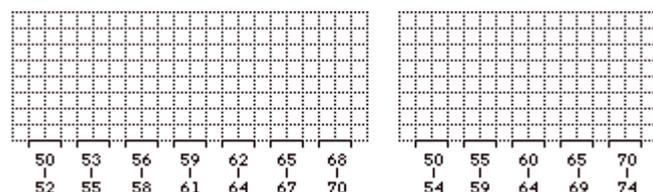
(2.1)

1	156	6	157	11	157	16	160
2	168	7	170	12	165	17	163
3	162	8	157	13	163	18	162
4	150	9	159	14	165	19	155
5	167	10	164	15	166		

....

....

....

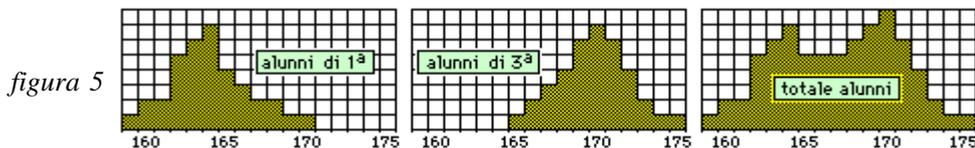
Riproduci qui a fianco gli istogrammi (*corretti*) che hai tracciato su carta quadrettata

10 Due persone hanno calcolato l'altezza media delle alunne del quesito 9 utilizzando il programma **Stat** (scheda 1 di *Le statistiche*, quesiti 33, e23) in due diversi modi (vedi figura a fianco). Qual è la differenza tra i due procedimenti?

La situazione analizzata nei quesiti 9 e 10 mette in luce alcuni problemi.

Un *primo problema* è che si possono ottenere istogrammi con andamento abbastanza diverso da quello degli istogrammi di fig. 2. In questo caso ciò è dovuto al fatto che abbiamo considerato solo le informazioni relative alle diciassettenni di una particolare scuola mentre nel caso di fig. 2 avevamo a disposizione la totalità dei ventenni. Se la scuola fosse stata di dimensioni molto maggiori si sarebbero ottenuti istogrammi dall'andamento simile a quello degli istogrammi di fig. 2. Un *secondo problema* è che ci possono essere più mode: la scelta del numero degli intervalli, influenzando la forma dell'istogramma, può anche condizionare la quantità delle classi modali che si ottengono.

Val la pena di osservare che vi sono situazioni in cui la forma dell'istogramma è diversa da quelle "a campana" degli istogrammi di fig. 2 per motivi di fondo, non perché sono poche le informazioni raccolte o perché non si sono scelti in modo opportuno gli intervalli. Ad es. in *figura 5* sono riportati gli istogrammi di distribuzione (di frequenza assoluta) delle altezze degli alunni (maschi) delle classi - due prime e due terze - presenti nella succursale di una scuola secondaria superiore. L'istogramma a sinistra si riferisce agli alunni delle prime, quello al centro agli alunni delle terze, quello a destra al totale degli alunni.

11 Discutete la relazione tra la forma dell'istogramma relativo all'intera succursale e quella degli altri due.

figura 5

Un *terzo problema* è che l'altezza media delle alunne del quesito 9 (161 cm, arrotondando) non cade nella moda 162-164 cm. In questo caso ciò dipende dal numero delle alunne, piccolo rispetto al totale delle diciassettenni. Ma vi sono fenomeni che danno comunque luogo a istogrammi di distribuzione con moda molto diversa dalla media.

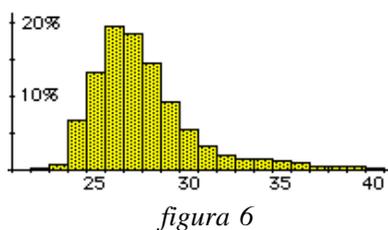



figura 6

Ad es. nel caso della distribuzione dell'età di laurea presso l'Università di Genova nel triennio 1984-86 (*figura 6*) la media è 28 anni mentre la moda è 26 anni (attualmente, a causa dell'introduzione di due successivi livelli di laurea, l'età della conclsione degli studi si alzata di circa un anno). Infatti il valore della media subisce l'influenza della "coda" costituita dalle persone che si laureavano con grande ritardo (studenti lavoratori, "perdigiorno" mantenuti dalla famiglia benestante, …). E questa coda, che sta alla destra della classe modale, fa aumentare il valore della media rispetto a quello della moda.

Se nella scuola del quesito 9 l'alunna alta 150 cm si ritira e, contemporaneamente, si iscrive una diciassettenne spilungona, brava giocatrice di pallacanestro, alta 182 cm, l'altezza media diventa 163.1 cm: la distribuzione delle altezze non cambia particolarmente, ma il nuovo valore di 182 cm, anomalo rispetto alla altre altezze (*figura 7*), influisce non poco sul valore della media, che aumenta di quasi 2 cm.

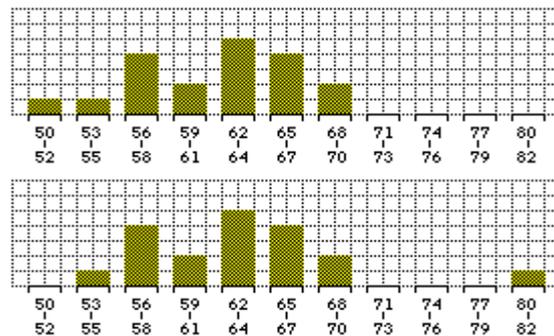



figura 7

Questo esempio e quello relativo all'età di conclusione degli studi universitari mettono in luce che la *media aritmetica* è un valore medio che *non* è *sempre significativo*.

Nel caso delle altezze delle alunne diciassettenni abbiamo visto che il piccolo numero di esse fa sì che neanche la moda sia particolarmente indicativa. Ciò si vede bene anche dall'istogramma di distribuzione (fig.7 in alto): la classe 159-161 cm, che è "centrale" rispetto all'istogramma, ha una colonna più bassa rispetto a classi più "laterali", mentre per le altezze di coetanei dello stesso sesso ci aspettiamo un andamento più a campana, come per gli istogrammi di fig. 2.

In situazioni come quelle di questi due esempi può essere utile impiegare un ulteriore tipo di valore medio: il valore del dato al centro dell'elenco dei dati ordinati, o ***mediana***.

Nel caso delle 19 diciassettenni ordinando le loro altezze (cioè passando dalla prima alla seconda riga della tabella seguente) troviamo che l'altezza centrale, cioè quella al 10° posto, è di 162 cm. Dopo lo "scambio" di alunne (terza riga) l'altezza centrale è diventata 163 cm. Se fosse venuta un'ipotetica superspilungona di 2 metri la mediana non sarebbe ulteriormente aumentata. La media aritmetica, invece, come si vede nella colonna finale, sarebbe aumentata di un altro centimetro.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	media
156	*168*	*162*	*150*	*167*	*157*	*170*	*157*	*159*	*164*	*157*	*165*	*163*	*165*	*166*	*160*	*163*	*162*	*155*	
150	155	156	157	157	157	159	160	162	**162**	163	163	164	165	165	166	167	168	170	161.4
155	156	157	157	157	159	160	162	162	**163**	163	164	165	165	166	167	168	170	182	163.1
155	156	157	157	157	159	160	162	162	**163**	163	164	165	165	166	167	168	170	200	164.0

Vediamo come interpretare graficamente la mediana. Nella *figura 8* a sinistra è riprodotto l'istogramma di distribuzione delle altezze delle alunne in classi di altezza ampie 3 cm, questa volta realizzato rappresentando le varie modalità una attaccata alla successiva, senza lasciare spazio in mezzo; in questo modo la base dell'istogramma rappresenta l'intervallo di altezze che va da 150 cm a 170 cm.

Nella parte centrale della figura è indicato qual è il quadretto corrispondente a ciascuna alunna nel caso in cui l'istogramma fosse costruito seguendo l'elenco dei dati ordinati (seconda riga della tabella precedente), ed è evidenziato il quadretto corrispondente al dato centrale, cioè alla mediana: è il 10° quadretto, che è preceduto e seguito dallo stesso numero di quadretti (9).

Nella parte destra è tratteggiata la linea verticale che suddivide l'istogramma in due parti di uguale area. Essa passa per l'intervallo 162-164, come ci dovevamo aspettare da quanto visto sopra: il quadretto corrispondente al dato centrale sta nella colonna 162-164 cm.

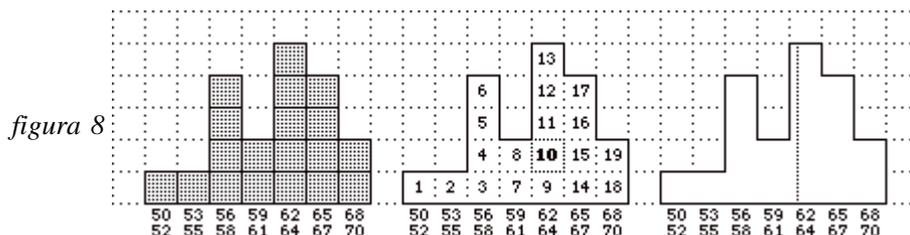
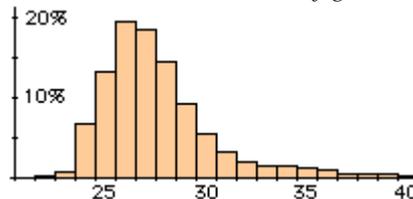
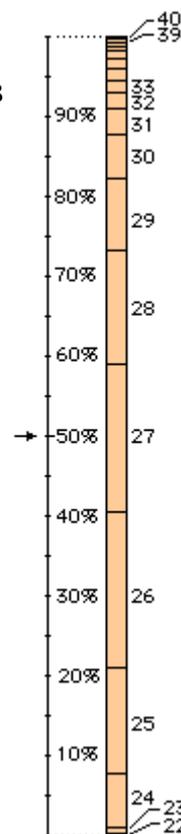



figura 8

Nel caso dell'età di laurea non dispongo dei dati dei singoli studenti ma solo dell'istogramma di distribuzione di fig. 6 (riprodotto a lato: *figura 9-A*). Non posso quindi procedere come ho fatto per l'altezza media delle alunne. Posso tuttavia individuare la mediana, seguendo due diversi procedimenti:

A *figura 9* **B**

(1) Sommo le frequenze percentuali delle varie età a partire dall'età minore (cioè dalla colonna più a sinistra dell'istogramma) e mi fermo quando raggiungo il 50%. Mentre nel caso delle altezze delle alunne si sono ordinati i dati in una tabella e si è presa la casella centrale, qui è come se appilassi i rettangolini che formano l'istogramma (passando da *figura 9-A* a *figura 9-B*) e considerassi quello che sta a metà della striscia ottenuta, cioè il rettangolino per cui passa la quota che indica il 50%: l'età mediana di laurea è dunque di 27 anni. In altre parole il 50% degli studenti si laurea entro i 27 anni e l'altro 50% si laurea a un'età non inferiore ai 27 anni.

(2) Opero sull'istogramma di figura 6: la linea di divisione verticale che lo taglia in due parti di area uguale (*fig. 10*) passa per l'intervallo che rappresenta i 27 anni.

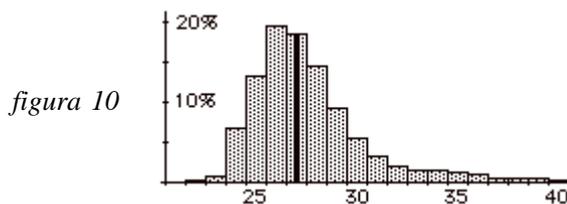



figura 10

Consideriamo l'*altezza dei ventenni* nel **1976** (anno intermedio tra il 1961 e il 1992 considerati all'inizio della scheda) in cui l'altezza media era di 172.0. Procedendo con il *metodo (2)* posso capire che la verticale che ne divide a metà l'istogramma (*fig. 11*) passa per il rettangolo indicato dalla freccia, cioè che l'altezza mediana è compresa tra 170 e 175 cm. Per procedere con il *metodo (1)* posso considerare la *tabella (2.2)*, in cui è riprodotta la distribuzione percentuale dei ventenni nel 1976, rappresentata graficamente in fig. 11. "Cumulando" (cioè sommando man mano) tali frequenze, si ottiene la *tabella (2.3)*, i cui valori vengono detti ***frequenze*** percentuali ***cumulate***. Il passaggio dalla tabella (2.2) alla tabella (2.3) non è altro che la traduzione "numerica" dell'"appilamento" con cui da un istogramma di distribuzione (come fig. 9-A) si passa a quello a striscia (come fig. 9-B).

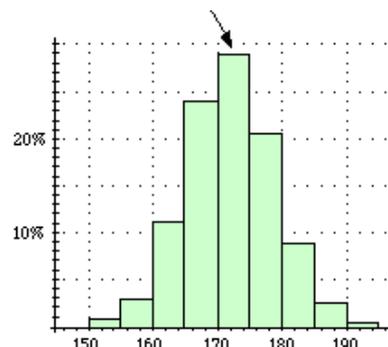



figura 11

(**2.2**)	[150,155)	[155,160)	[160,165)	[165,170)	[170,175)	[175,180)	[180,185)	[185,190)	[190,195)
frequenza %	0.7%	2.9%	11.2%	24.0%	28.9%	20.4%	8.9%	2.5%	0.5%

(**2.3**)	[150,155)	[155,160)	[160,165)	[165,170)	[170,175)	[175,180)	[180,185)	[185,190)	[190,195)
freq. % cumulata	0.7%	3.6%	14.8%	38.8%	67.7%	88.1%	97.0%	99.5%	100.0%

Sotto [165,170) è riportata la percentuale di ventenni con altezza minore di 170 cm: 38.8% è la somma di 0.7%, 2.9%, 11.2% e 24.0%. La colonna successiva ci dice che il 67.7% ha altezza minore di 175 cm. Quindi il valore che separa le altezze (in cm) del 50% dei ventenni più bassi da quelle del 50% dei ventenni più alti, cioè la mediana, cade in [170, 175).

3. Campionamento

Facciamo un'ultima osservazione a proposito della tabella (2.1). Essa non è il frutto di un esame che ha riguardato tutte le diciasettenni italiane, ma solo una parte di esse. Si tratta comunque di un numero non troppo piccolo di ragazze, che ci consente di fare delle deduzioni su come è distribuita l'altezza del complesso delle diciasettenni italiane. Quando per studiare un certo aspetto di un particolare insieme di "oggetti" (persone, animali, prodotti, …) si compiono osservazioni solo su una parte di essi, questa parte "estratta" dall'insieme totale degli oggetti viene chiamata ***campione***; l'analisi statistica così effettuata viene chiamata ***indagine campionaria***; il procedimento con cui si sono "estratti" gli oggetti di cui raccogliere le informazioni, viene chiamato *campionamento*. Un famoso esempio di indagine *non* campionaria sulla popolazione italiana è costituito dai *censimenti*, che vengono effettuati ogni dieci anni (…, 1971, 1981, 1991, …) intervistando attraverso opportuni questionari tutti gli italiani.

12 Se chiedeste a ciascuno studente delle classi prime della vostra scuola quale numero di scarpa porta e analizzaste i dati così raccolti, che cosa realizzereste?

un'indagine campionaria sugli studenti delle classi 1^{e} della vostra scuola	☐	un'indagine campionaria sui ragazzi italiani di 14-15 anni	☐
un'indagine "completa" sugli studenti delle classi 1^{e} della vostra scuola	☐	un'indagine "completa" sui ragazzi italiani di 14-15 anni	☐

13 Supponiamo che con l'indagine del quesito 12 si voglia effettuare un'analisi statistica sui ragazzi italiani di 14-15 anni. Il campione scelto ti sembra "rappresentativo", cioè adeguato a fornire informazioni estendibili all'intera popolazione italiana di 14-15 anni?

I termini "campionaria", "campionamento", … derivano dalla parola "campione" intesa come "esemplare rappresentativo" (pensa al rappresentante che mostra campioni dei beni prodotti dalle ditte per cui lavora). La parola è stata poi estesa al significato statistico di "parte rappresentativa" di un certo insieme di soggetti.

E` importante fissare l'attenzione sull'aggettivo ***rappresentativa***: non basta prendere un po' di soggetti e fare su questi i calcoli per ottenere delle informazioni significative sulla totalità dei soggetti. Supponiamo che l'Istat voglia analizzare un particolare aspetto delle condizioni di vita degli italiani tra un censimento e l'altro, ad esempio il numero dei componenti delle famiglie, e non abbia il tempo e i mezzi per fare un'indagine completa su tutti gli italiani. Può estrarre un campione di famiglie e analizzare i dati di queste. Ma deve fare l'estrazione non privilegiando una zona geografica, una fascia di età dei genitori, una condizione economica, … rispetto ad altre: infatti il fenomeno si presenta in maniera diversa al variare della regione, dell'epoca e dell'età in cui si sono sposati i genitori, delle condizioni sociali ed economiche, …; un campione che fosse fatto quasi tutto di famiglie dell'Italia centrale o che privilegiasse le famiglie di recente formazione rappresenterebbe poco fedelmente il complesso delle famiglie italiane.

Inoltre il campione deve essere *sufficientemente numeroso*. Ad esempio se una fabbrica di dischetti per calcolatori vuole fare un'indagine sulla quantità di letture/registrazioni che si possono fare sui dischetti prodotti prima che questi si danneggino (e, ovviamente, non sottopone ad una prova di durata tutti i dischetti: così facendo distruggerebbe tutta la propria produzione!) deve decidere quanti dischetti prendere "a caso" durante, ad esempio, una particolare giornata di produzione: prenderne il 10% sarebbe troppo dispendioso (occorrerebbe impiegare troppi dispositivi di lettura/scrittura su disco magnetico); prenderne lo 0.5% è *sufficiente*? Non è facile rispondere a questa domanda: occorre tener conto di altri fattori e utilizzare concetti matematici che per adesso non abbiamo ancora affrontato.

Riprenderai il problema del campionamento più avanti nel corso degli studi, dopo che avrai imparato i primi elementi di *calcolo delle probabilità*, cioè della parte della matematica che si occupa dei fenomeni casuali.

4. Percentili e "normalità"

Abbiamo visto che la mediana delle altezze dei ventenni del 1976 cade tra 170 e 175 cm: i ventenni del 1976 più bassi di 170 cm sono il 38.8% e quelli più bassi di 175 cm sono il 67.7%, quindi l'altezza che delimita il 50% dei ventenni più bassi è compresa tra queste due misure (*figura 12*). In altre parole, messi in ordine di altezza i ventenni, quello che sta a metà è stato classificato nell'intervallo [170,175).

[150,170)	[150,175)
38.8%	67.7%

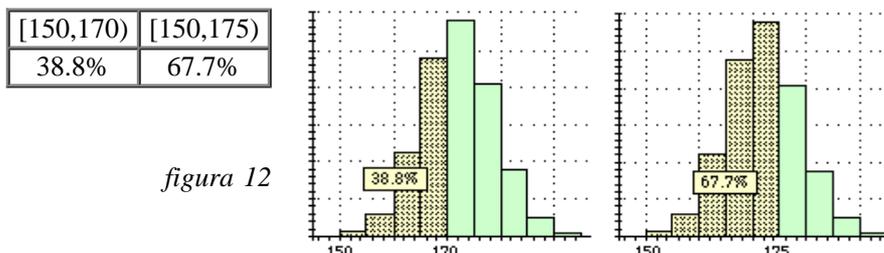



figura 12

Per determinare con più precisione il valore della altezza mediana posso osservare (vedi *figura 13*, che rappresenta l'appilamento dei rettangoli dell'istogramma) che il 50% è più vicino a 38.8% che a 67.7%, e quindi supporre che la mediana sia più vicina a 170 che a 175.

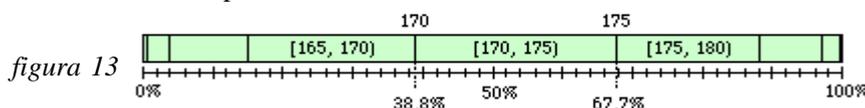
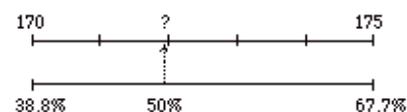



figura 13

La figura a lato fa supporre che la mediana sia circa 172 cm. È un valore *stimato*: non sono certo che sia l'arrotondamento a 3 cifre della mediana. Infatti ho diviso [170,175) in 5 parti uguali, *come se* le altezze che cadono in questo intervallo si distribuissero uniformemente, ripartendosi equamente tra [170,171), [171,172),…, [174,175). Per una valutazione senza incertezze dovrei conoscere come le altezze si distribuiscono effettivamente in tali intervalli.

Come avrei potuto stimare il valore della mediana *senza ricorrere a* queste *rappresentazioni grafiche*?

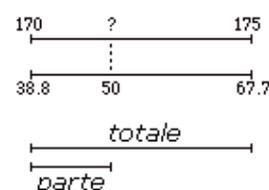
Devo trovare un metodo numerico per associare a 50% la posizione corrispondente nell'intervallo [170,175), cioè il valore che lo suddivide allo stesso modo in cui 50 suddivide l'intervallo che va da 38.8 a 67.7.

$$R = \frac{50 - 38.8}{67.7 - 38.8} = \frac{11.2}{28.9}$$ è il rapporto R tra la *parte* a sinistra e il *totale* dell'intervallo (*figura 14*)

figura 14

Quindi la distanza tra 170 e **?** è pari all'ampiezza di [170,175) per *R* (= 11.2/28.9 = 0.3875… = 38.75…%), cioè 5·R.

Per trovare "?" devo aggiungere all'estremo sinistro dell'intervallo tale distanza:
? = 170+5·11.2/28.9 = 171.937… = [arrotondando] 172

Con la CT posso eseguire il calcolo nel modo a fianco: 5 [×] 11.2 [÷] 28.9 [+] 170 [=]

L'assunzione che le altezze si distribuiscano uniformemente tra 170 e 175 equivale a considerare le *variazioni* di altezza *proporzionali* alle variazioni della frequenza cumulata. Quindi (vedi *fig. 15*) potevo anche procedere così [→ "variazioni proporzionali" nell'indice de *Gli oggetti matematici*]:

k = fattore di proporzionalità = pendenza =

$$\frac{\mathit{VariazioneAltezza}}{\mathit{VariazioneFrequenzaPerecentualeCumulata}} = \frac{5}{28.9}$$

Quindi alla variazione della frequenza percentuale cumulata da 38.8 a 50 (= 11.2) corrisponde:

$$\mathit{VariazioneAltezza} = 11.2 \cdot k = 11.2 \cdot 5/28.9 = 1.937\ldots$$

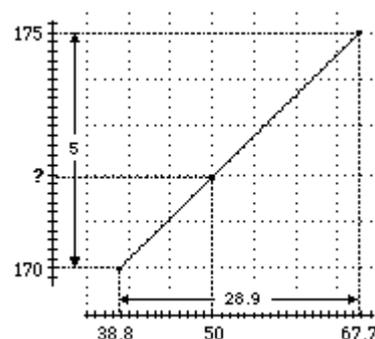



figura 15

Analogamente a come ho proceduto per la mediana (il valore che delimita superiormente il primo 50% dei dati ordinati), posso trovare per ogni percentuale *p* il valore che delimita superiormente il primo *p*% dei dati. Ad es. da fig.9-B posso ricavare che il 10% degli studenti si laurea entro i 25 anni (e il 90% si laurea dopo il compimento dei 25 anni) e che il 75% degli studenti si laurea entro i 29 (e il 25% si laurea avendo già compiuto i 29 anni). Infatti tagliando il diagramma a striscia alle quote 10% e 75% vado a cadere nei rettangoli che rappresentano le età di 25 anni e 29 anni, rispettivamente.

14 Usando fig.9-B completa la seguente *tabella (4.1)*, dove *età* indica l'età che separa il primo *p*% degli studenti (ordinati per età al momento della laurea) dai rimanenti.

(**4.1**)

p%	5%	10%	25%	50%	75%	90%	95%
età (in anni)		25			29		

Il valore corrispondente a una frequenza cumulata del *p*% viene detto *p*-esimo ***percentile*** o percentile di *ordine p*. Ad es. nel nostro caso il 50° percentile (cioè la mediana) è 27, il 10° percentile è 25, il 75° è 29.

Tabelle come (4.1), o quelle che si ottengono con una diversa scelta delle percentuali, possono essere considerate un'alternativa agli istogrammi di distribuzione percentuale.

Ad esempio la forma allungata verso destra dell'istogramma di fig.10 (o fig.9-A) trova corrispondenza nel fatto che il 40% che segue la mediana (cioè gli studenti che vanno dal 50° al 90° percentile) spaziano dai 27 ai 31 anni, mentre il 40% che precede la mediana (cioè gli studenti che vanno dal 10° al 50° percentile) spaziano in un intervallo molto più piccolo, dai 25 ai 27 anni. La differenza tra l'intervallo che va dal 5° al 50° percentile e quello che va dal 50° al 95° è ancora maggiore: nel primo caso si spazia su 4 anni di età, dall'età di 24 anni a quella di 27, nel secondo si spazia su 8 anni, dall'età di 27 a quella di 34.

15 Anche nel caso delle altezze dei ventenni (nel 1976) possiamo calcolare i percentili, procedendo con metodi simili a quelli impiegati per la mediana. Possiamo ottenere ad esempio la *tabella (4.2)*, dove l'ultima riga indica i valori che poi sono stati arrotondati nei dati riportati nella seconda. Confrontate la forma dell'istogramma relativo a questi dati (figura 11) con le informazioni ricavabili dalla tabella dei percentili.

(**4.2**)

p%	5%	10%	25%	50%	75%	90%	95%
h (in cm)	161	163	167	172	177	181	184
	160.63	162.86	167.13	171.94	176.79	181.07	183.88

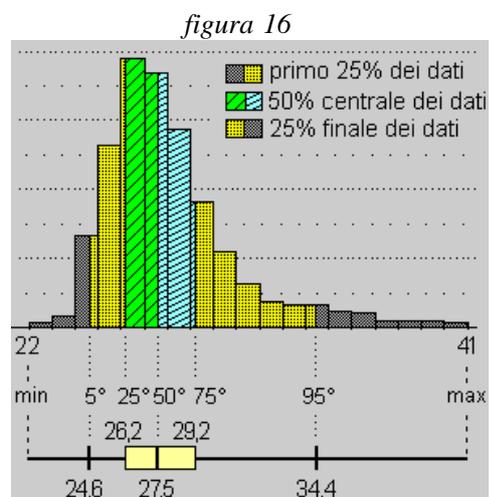
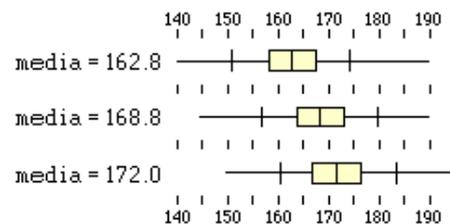
16 Secondo voi è normale che, alla fine degli anni '80, uno studente si laureasse a 28 anni (mentre ci sono studenti che si laureavano a 22 e 23 anni)? Secondo voi è basso un adulto alto 168 cm (mentre l'altezza media dei maschi che avevano 20 anni nel 1992 è 174 cm - fig. 2)?

In *figura 16* sono evidenziati i percentili di ordine 5, 25, 50, 75 e 95 (stimati fino ai decimi) della distribuzione dell'età di laurea alla fine degli anni '80 (tabella 4.1). I dati cadono in [22, 41) (da 22 anni a 40 anni e rotti), la mediana (50° percentile) è 27.5, il 50% centrale dei dati cade tra 26.2 (25° percentile) e 29.2 (75° percentile).

Sotto all'istogramma è raffigurata una rappresentazione grafica alternativa, chiamata *box-and-whiskers-plot* ("diagramma a scatola e baffi") o, più in breve, ***box-plot***. È una figura "lineare" (si sviluppa solo orizzontalmente, non in due dimensioni, come gli istogrammi) che sintetizza in modo efficace come si distribuiscono i dati.

Il box (scatola) rappresenta il 50% centrale dei dati, le tacche lungo i baffi rappresentano il 5° e il 95° percentile, la tacca dentro al box rappresenta la mediana.

figura 16

Il fatto che il box sia spostato verso sinistra (cioè che il baffo sinistro sia molto più corto di quello destro) corrisponde all'allungamento verso destra dell'istogramma. Il box plot avrebbe potuto essere tracciato anche riferendosi a percentili di ordine diverso (ad es. il 3° e il 97° al posto del 5° e del 95°).

17 A lato sono raffigurati i box plot relativi alle altezze dei ventenni italiani nel 1881, nel 1961 e nel 1976. I dati utilizzati per il 1881 erano classificati in [140,145), …, [185,190), per il 1961 in [145,150), …, [185,190), per il 1976 in [150,155), …, [190,195). Questo spiega i diversi punti di partenza/arrivo dei baffi.

– Qual è l'intervallo (con estremi arrotondati ai centimetri) in cui cade il 90% centrale delle altezze dei ventenni del 1881? .... E nel caso del 1961? .... E in quello del 1976? ....
– Le mediane differiscono in maniera significativa dalle medie (indicate in figura)? ....

I percentili permettono di affrontare in modo serio questioni come: «*che cosa vuol dire essere di altezza normale?*». Ad esempio che cosa si intende dicendo che una persona è bassa? Che la sua altezza è inferiore all'altezza mediana? Ma in tal caso le persone si dividerebbero quasi tutte in alte o basse, e sarebbero normali solo poche persone.

Per dare un significato "oggettivo" alla valutazione dell'altezza dobbiamo fissare delle convenzioni. Ad esempio potremmo dire che sono "nella media" le altezze che cadono entro il 50% centrale dei dati, cioè tra il 25° e il 75° percentile, e che sono "basse" quelle inferiori al 25° percentile e "alte" quelle che superano il 75° percentile. Considerazioni analoghe si potrebbero fare per l'età di laurea.

Si tratta, comunque, sempre di valutazioni statistiche basate su scelte convenzionali e che devono essere riferite a valutazioni più generali della situazione che si sta considerando. Facciamo due esempi.

(***1***) Se ritenessimo "statisticamente" normale laurearsi tra il 25° e il 75° percentile, cioè, nel caso considerato, tra i 26 e i 29 anni, non potremmo certo considerare "anormale" (nel senso di "tipo strano") uno studente che si laurea a 25 anni o ritenere che chi si iscrive all'università possa preventivare come "normale" (cioè come obiettivo "accettabile") la conclusione degli studi a 29 anni.

(***2***) Se un pediatra dispone della tabella a fianco dei percentili per le altezze delle bambine di 12 mesi e, visitando una bimba di 1 anno, trova che è alta circa 68 cm, può supporre che vi sia qualche ritardo nella crescita. Infatti la sua altezza è inferiore al 3° percentile: il 97% delle bimbe della sua età ha un' altezza superiore.

3°	10°	25°	50°	75°	90°	97°
69	71	72	74	76	77	79

Ovviamente in questa valutazione il pediatra deve tener conto dell'altezza dei genitori: se anche la loro altezza cadesse tra i primi percentili il fenomeno non sarebbe particolarmente preoccupante.

Inoltre deve effettuare la misura con cura, eventualmente ripetendola più volte: già con un adulto da una misurazione all'altra ci può essere lo scarto di un paio di centimetri (sulla misura incidono la posizione della colonna vertebrale, che può variare anche in relazione alla stanchezza della persona, la posizione della testa, la cura con cui viene letta la scala graduata, …); con un bimbo piccolo, che è difficile da tener fermo, lo scarto può essere anche maggiore.

A questo punto dovrebbe essere chiaro che il concetto di ***normalità*** è convenzionale e dipende dal contesto. Ad esempio se un regista cerca per una parte un uomo né troppo alto né troppo basso può dare l'incarico di cercare un uomo la cui altezza rientri in quella della maggioranza degli uomini. Questa espressione informale può essere tradotta dai collaboratori del regista nella ricerca di una persona la cui altezza cada nel 50% centrale delle altezze, cioè tra il 25° e il 75° percentile. In altre situazioni si possono assumere come altezze "normali" intervalli più piccoli (ad es. tra il 30° e il 70° percentile, cioè il 40% centrale dei dati) o più grandi (ad es. dal 3° al 97° percentile, cioè il 94% centrale).

Veniamo, infine, a dati che vi riguardano più da vicino.

Le *tabelle (4.3)* e *(4.4)* contengono alcuni percentili relativi alle *altezze a varie età dei ragazzi e delle ragazze italiane nate intorno al 1980*.

(4.3) M

età	3°	10°	25°	50°	75°	90°	97°
14	148	154	159	165	170	174	179
15	153	160	164	170	175	178	184
16	157	163	168	173	177	181	186
17	159	165	170	174	178	182	187
18	160	166	170	174	179	183	188
19	160	166	170	174	179	183	188

(4.4) F

età	3°	10°	25°	50°	75°	90°	97°
14	149	153	156	160	164	167	171
15	150	155	158	161	165	168	172
16	151	156	159	162	166	169	172
17	151	156	159	162	166	169	172

18 Discutete le principali differenze tra maschi e femmine messe in luce dalle tabelle (4.3) e (4.4).

19 Supponiamo che il film discusso prima del quesito 18 si ambienti in Italia nel 2006 e che la parte sia quella di un italiano cinquantenne. Allora i collaboratori del regista possono utilizzare la tabella (4.2). Tra quali valori deve essere compresa l'altezza della persona che deve sostenere tale parte? ....

Le figure 1 e 2 e le tabelle (4.2), (4.3) e (4.4) sono riferite al complesso degli italiani. In *zone diverse* del paese la distribuzione delle altezze si può manifestare in maniera piuttosto differente. Ad esempio l'altezza media dei maschi ventenni nel 1976, che sul totale dell'Italia era 172.0 cm, in Sardegna era 168.5 cm, in Abruzzo 171.1 cm e in Friuli-Venezia Giulia 175.6 cm.

L'altezza di una ragazza o di un ragazzo che risiede in Abruzzo (regione che presenta una distribuzione delle altezze quasi uguale a quella del complesso dell'Italia) ma ha i genitori originari della Sardegna o del Friuli dovrebbe essere riferita più ai dati di questa regione che a quelli nazionali, cioè a dati che sono slittati in un caso di quasi 4 cm in meno, nell'altro di quasi 4 cm in più rispetto a quelli delle tabelle (4.3)-(4.4).

Le tabelle (4.3)-(4.4) sono da interpretare tenendo conto oltre che di questo aspetto anche del fatto che i *tempi dello sviluppo* dell'altezza possono variare da individuo a individuo. Vi può essere il ragazzo alto 170 cm a 15 anni (oltre il 50° percentile) e che negli anni successi non cresce più (scendendo sotto al 25° percentile) e quello che a 15 anni è alto 160 cm (sotto al 25° percentile) ma che continua a crescere e a 18 anni raggiunge i 175 cm (oltre il 50° percentile).

I tempi dello sviluppo dell'altezza sono cambiati nel corso degli anni: oltre all'altezza media (→ fig. 1) è cambiata anche l'età in cui ciascuno raggiunge la propria altezza massima. Attualmente in Italia praticamente tutti i maschi (→ tabella (4.3)) oltre i 18 anni non aumentano più in altezza e praticamente tutte le femmine (→ tabella (4.4)) a 16 hanno già raggiunto l'altezza massima. Agli inizi del Novecento queste età erano spostate in avanti di 5 o 6 anni.

Differenze tra maschi e femmine, tra individuo e individuo e tra epoche diverse analoghe a quelle osservate per lo sviluppo dell'altezza valgono anche per lo *sviluppo sessuale*. Ad esempio nel 1890 in Europa una donna era in grado di procreare figli mediamente a partire dai 16 anni; nel 1990 questa età media era scesa a 13 anni. Per i maschi queste età vanno spostate in avanti di circa 2 anni.

Pure in questo caso si tratta di valori medi: anche per queste età si potrebbero considerare istogrammi di distribuzione o tabelle di percentili. Ad esempio vi può essere la ragazza che è sessualmente "adulta" a 11 anni e quella che lo diventa a 16.

5. Concludendo

Proponiamoci di fare anche noi un'indagine statistica, ad esempio su due aspetti: le altezze dei ragazzi e delle ragazze tra i 14 e i 18 anni, per operare un confronto con i dati delle tabelle (4.3) e (4.4), e sulla lunghezza dei capelli dei ragazzi e delle ragazze della vostra età.

20 Precisate meglio gli obiettivi della vostra indagine e discutete come organizzarla affinché si possano ottenere informazioni utili e attendibili.

Per adesso potrete accontentarvi di prendere come campione i ragazzi delle classi della vostra scuola, restringendovi alla sola vostra classe per quanto riguarda la lunghezza dei capelli. Eventualmente potrete confrontare i risultati della vostra indagine con quelli ottenuti con un'indagine simile da alunni di altre scuole e con i risultati che si ottengono mettendo insieme tutti i dati.

21 Raccolti i dati, registrateli e analizzateli opportunamente, ad esempio usando il programma **Stat** (→ quesito e9). Se fate copia dei vostri dati e la stessa operazione viene fatta da altre classi, mettendo poi insieme i dati raccolti otterrete un campione più numeroso su cui ripetere l'analisi.

Con questa scheda abbiamo visto ulteriori *modelli matematici* usati per fare statistiche e abbiamo esaminato alcuni problemi relativi al loro impiego.

Le ultime osservazioni sul campionamento ci offrono lo spunto per sottolineare che l'uso dei modelli statistici è soggetto a interpretazioni erronee o distorte più di altri modelli matematici. Il motivo risiede nel fatto che con essi spesso non si rappresentano tanto le caratteristiche di un particolare oggetto o persona quanto le condizioni che riguardano una *collettività*, le caratteristiche essenziali dell'*andamento* complessivo di un fenomeno che varia nel tempo, … : il modo in cui vengono raccolte le informazioni (su tutta la popolazione o su quanta parte di essa? ogni quanto tempo? con quale modalità di rilevamento? …) e il fatto che le caratterisitiche delle persone o degli eventi singoli possono discostarsi molto dalla valutazione complessiva che emerge, introducono notevoli elementi di approssimatività.

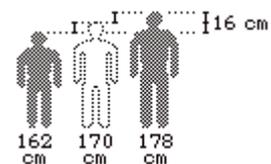
Alcuni degli esercizi seguenti offrono occasioni per esemplificare e approfondire questa riflessione.

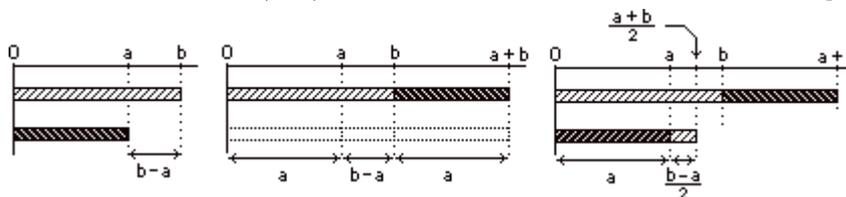
6. Esercizi

e1 Nel caso delle rappresentazioni "procapite" (kg di carne consumata per abitante, m^2 di superficie per abitante, m^3 di spazio abitativo per famiglia, L di reddito per lavoratore, …) la media può essere interpretata come rapporto tra due grandezze: un *totale* espresso in una data unità di misura (kg, L, m^2, m^3, …) e una "popolazione" (di persone, famiglie, …).

Nel caso dell'altezza media questa interpretazione non ha senso: è vero che faccio la somma delle altezze e la divido per il numero delle persone, ma questa somma non la posso interpretare come "altezza totale" delle persone! non posso dire che l'altezza media è di 174 cm per abitante!

Posso tuttavia dare anche questa interpretazione:
l'altezza media di due persone è pari all'altezza di una terza persona che abbia lo stesso dislivello dalla prima e dalla seconda.

Ad es. 170 cm è la media di 162 e 178 cm; infatti (162+178)/2=340/2= 170. Ma 170 è anche il *valore a metà* tra 162 e 178: 162+8=170, 178–8=170.

• *Leggi* la spiegazione generale di questo fatto presente alla prima voce "valori medi" de *Gli oggetti matematici*. Poi *osserva* la figura seguente, che illustra due modi per trovare la lunghezza media M di due segmenti lunghi *a* e *b*:

uno è usare la formula: M = $(a+b)/2$; l'altro è usare: M = a+.................... *[completa]*

• Prova a calcolare a mente lo stipendio medio mensile (m) di una famiglia composta solo da marito e moglie, *lei* con stipendio di 2 milioni e 400 mila (x), *lui* con stipendio di 2 milioni e 500 mila lire (y), usando le formule:

(1) $m = (x+y)/2$ (2) $m = x+(y-x)/2$

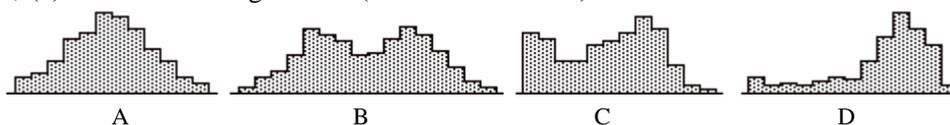
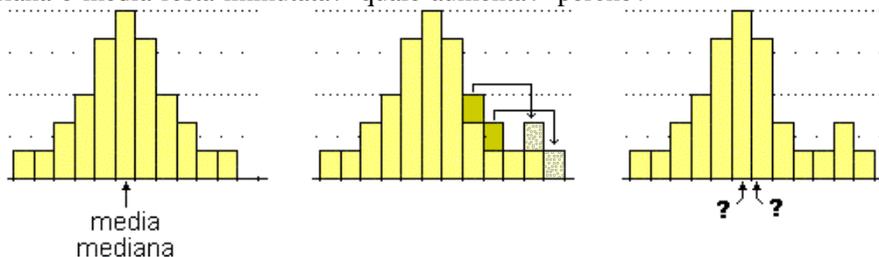
Quale procedimento trovi più conveniente? Perché?

• La località C è esattamente a metà strada tra una località posta al 34° km (x) di una certa strada statale e una località B posta al 112° km (y). Calcola a quale chilometro (m) si trova C.

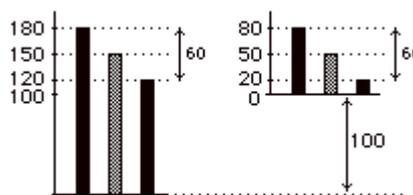
Quale procedimento tra (1) e (2) trovi più conveniente? Perché?

e2 Per controllare attraverso un procedimento "numerico" la dimostrazione "geometrica" dell'equivalenza delle formule (1) e (2) (→ quesito e1) per il calcolo della media tra x e y, *completate* i seguenti passaggi:

$$x + \frac{y-x}{2} = \frac{x \cdot 2}{2} + \frac{y-x}{2} = \frac{x \cdot 2 + y - x}{2} = \dots$$

e3 Indica tra i seguenti istogrammi quale può rappresentare la distribuzione: (1) dell'età dei morti in un paese sviluppato, (2) dell'età dei morti in un paese sottosviluppato, (3) dell'altezza delle femmine adulte di una città, (4) delle altezze degli adulti (maschi e femmine) di una città.

e4 Ho un istogramma di distribuzione dalla forma simmetrica, in cui media e mediana cadono entrambe nella classe centrale. Se tolgo pezzi da colonne a destra della colonna centrale e li sposto più a destra, quale tra mediana e media resta immutata? quale aumenta? perché?

e5 Tra gli istogrammi raffigurati nel quesito e3 quale ha sicuramente la media inferiore alla mediana; quale può avere media e mediana che cadono nella classe modale; quale può avere media e mediana che cadono in una stessa classe, diversa dalla classe modale?

e6 Hai visto nel quesito e1 che la media tra due numeri coincide con il valore che sta a metà tra essi.

Il disegno a fianco suggerisce che per trovare la media tra 120 e 180 posso operare su 20 e 80: la distanza tra 120 e 180 è uguale alla distanza tra 20 e 80 (ottenuti togliendo 100), per cui posso trovare il valore che sta a metà di questi ultimi e poi riaggiungere 100:

(media tra 120 e 180) = (media tra 20 e 80) + 100

Tale procedimento (togliere uno stesso numero da tutti i valori di cui si fa la media e poi riaggiungerlo al risultato) può essere esteso al calcolo della media di più di due valori.

Applicalo per calcolare la media di ciascuno dei seguenti insiemi di dati:

(a) 253, 254, 259, 256 (b) 2.5, 2.1, 2.3 (c) 1037, 1045, 1000, 1002

e7 Completa la seguente formula in modo che rappresenti il procedimento descritto nel quesito precedente:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = \frac{(x_1 - h) + (x_2 - h) + (x_3 - h) + \ldots + (x_n - h)}{n} + \ldots$$

e8 0°C (Celsius) corrispondono a 32°F (Fahrenheit) e 100°C corrispondono a 212°F. Le variazioni in °C sono proporzionali alle variazioni in °F. Voglio trovare l'equivalente in °F di 30°C. Procedo come dopo fig. 13.

$$R = \frac{parte}{totale} = \frac{30}{100}$$

Per arrivare da 32 a "?" devo addizionare 180·R = 180·30/100 = 18·3 = 54

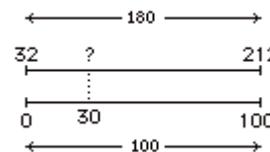
(**1**) Qual è la rappresentazione in °F della temperatura di 30°C?

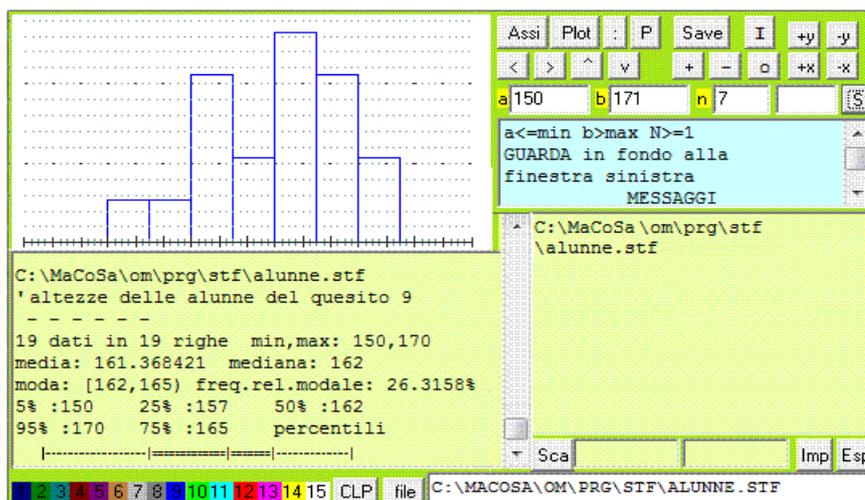
(**2**) Scrivi la formula che generalizza il procedimento al caso di una temperatura ***c*** in gradi Celsius qualunque, indicando con ***f*** la corrispondente temperatura in gradi Fahrenheit:

f = 32 + 180 · …

Il rapporto tra variazione in °F e variazione in °C è 180/100=1.8, cioè alla variazione di 1°C corrisponde quella di 1.8°F [→ "variazioni proporzionali" nell'indice de *Gli oggetti matematici*]. Usando questa informazione posso dedurre che:

f = 32 + c · 1.8

(**3**) Questa formula è equivalente a quella che hai trovato in (2)?

e9 Nel software MaCoSa è presente il programma ***Stat***, che consente di creare, leggere o modificare archivi di dati (in inglese, *file* - pronuncia: *fail*), e di fare analisi statistiche su archivi di dati. Nella cartella STF, di file per Stat, sono presenti anche alcuni file relativi a esempi ed esercizi proposti in questa scheda.

Ecco che cosa si può ottenere per il file alunne.stf, che contiene i dati sulle altezze delle alunne esaminati nel §2 della scheda:

Stat trova il massimo e il minimo tra i dati e, a richiesta (premendo [S]) calcola i percentili. Come vedi ritroviamo che la mediana (50° percentile) è 162. Se si richiede il tracciamento dell'istogramma di distribuzione (con [plot]), occorre spacificare come deve classificare i dati:
(1) un intervallo (che contenga minimo e massimo) e
(2) il numero delle classi in cui suddividerlo. Per comprendere il modo in cui devono essere scelti gli intervalli puoi eseguire il quesito 10. Per ora:

(*a*) *utilizza* Stat per *leggere* il file "alunne" e, poi, per creare un nuovo file contenente le altezze delle alunne dopo la venuta della superspilungona (ultima riga della tabella dopo figura 7) nel seguente modo:

(*1*) *apri* alunne.stf, copialo, incollalo nella finestra destra; (*2*) *sostituisci* il dato 150 col dato 200, clicca [I]

(*b*) *utilizza* Stat per trovare la media (che poi arrotondi come i dati di partenza) e la mediana dei nuovi dati.

e10 Esaminiamo come si è comandato a **Stat** il tracciamento dell'istogramma riportato nel quesito e9. Si voleva ottenere un istogramma come quello di figura 8: 7 intervallini ampi 3: 150-152, 153-155, …, 168-170. Poiché 150,151,152 stanno in [150,153), 153,154,155 stanno in [153,156), …, 168,169,170 stanno in [168,171) possiamo scegliere come [a,b) l'intervallo [150,171) e farlo suddividere in 7 intervallini.

Il programma calcola le frequenze relative, visualizza la frequenza della classe modale (la moda è [162,165), cioè 162-164, e la sua frequenza relativa è 0.2631…, cioè 26.3%), e sceglie automaticamente il sistema di riferimento in modo da rappresentare l'intero istogramma.
(***a***) Dal grafico riportato nel quesito e9 ricava (arrotondate agli interi) le frequenze percentuali delle modalità 153-155 e 156-158 (utilizza il fatto che in questo caso la colonna più alta rappresenta 26.3% e, quindi, i livelli tracciati con la punteggiatura distano 10% - al computer, si può anche cliccare col mouse sul grafico e leggere le coordinate nella piccola finsetra a destra).

Volendo essere più precisi, si poteva tener conto che i ***dati*** delle altezze non sono ***esatti***, ma sono ***arrotondati***. È vero che, ad es., 150,151,152, come numeri esatti (150.000…,151.000…,152.000…), stanno in [150,153); ma se li intendiamo come misure arrotondate, essi rappresentano altezze che vanno da 149.5… a 152.4…. Allora potevamo scegliere come [a,b), invece dell'intervallo [150,171), l'intervallo [149.5,170.5). Il grafico sarebbe, comunque, venuto uguale, anche se riferito a una porzione di asse orizzontale più a sinistra di 0.5.
(***b***) Cosa avremmo ottenuto come classe modale?

Nota. Come ***media*** viene visualizzato il numero 161.3684, risultato approssimato di (156+168+…)/19. Non tutte le cifre di esso sono significative, poiché i dati non erano esatti, ma ***arrotondati*** agli interi. Se i dati sono pochi la media che si ottiene deve essere arrotondata agli interi.

Ma se i dati sono *almeno una decina*, come in questo caso, poiché le approssimazioni per difetto e quelle per eccesso in parte si compensano, si può prendere la media arrotondata ai decimi. Più in generale se i dati fossero arrotondati alla cifra di posto n si può arrotondare la media alla cifra di posto n–1.

Quindi possiamo prendere come altezza media 161.4.

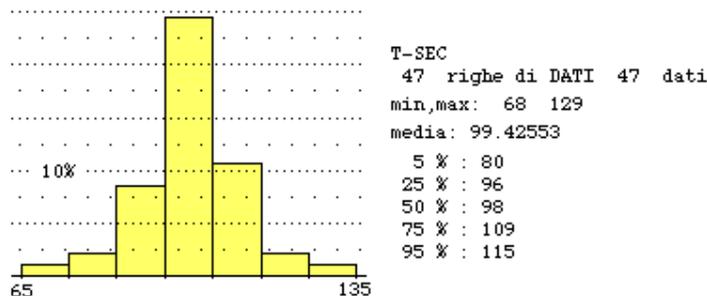
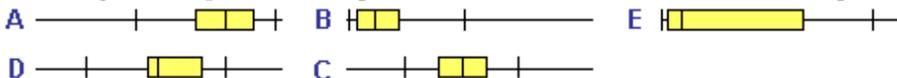
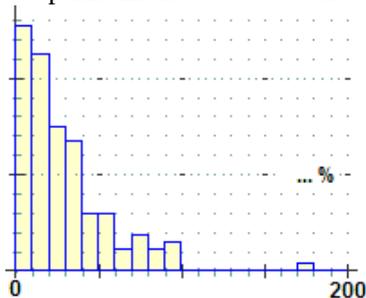
Se i dati sono *almeno un migliaio* si può arrotondare la media fino alla cifra di posto n–2 (ad es. se i dati arrotondati agli interi la media può essere arrotondata ai centesimi). Questa scelta può essere motivata con considerazioni di calcolo delle probabilità che, per ora, non siamo in grado di affrontare.

e11 Nelle gare di corsa non particolarmente "importanti" (e, fino a qualche decennio fa, in tutte le gare) i tempi non vengono rilevati con apparecchiature elettroniche, ma a mano, con dei cronometri.

I cronometri, così come tutti gli odierni orologi al quarzo, sono precisissimi: sgarrano di pochi secondi al mese. Quindi, se un orologio è dotato di un pulsante "start/stop" e visualizza i centesimi di secondo, siamo sicuri che il tempo che intercorre tra due successive pressioni del pulsante è rappresentato correttamente, troncato ai centesimi di secondo, dal numero che viene visualizzato.

Nei cronometraggi delle gare, tuttavia, non viene impiegato un unico cronometro, ma i tempi vengono misurati contemporaneamente da più cronometristi. Poi vengono presi come tempi i valori medi, troncati ai centesimi, dei tempi registrati dai diversi cronometristi.

- *Discuti* questa scelta alla luce dell'analisi del file "t-sec.stf" (contenuto in Stf) in cui sono stati registrati i valori in centesimi di secondo che una persona ("normale", non un allenato cronometrista) ha ottenuto misurando ripetutamente con un orologio A il tempo che impiega un altro orologio B a scattare in avanti di 1 s (ad esempio la persona ha dato lo Start sull'orologio A appena l'orologio B ha visualizzato 15:31:08 e ha dato lo Stop appena B ha visualizzato 15:31:09, e ha trascritto il tempo visualizzato da A; poi ha fatto lo stesso per esempio dalla visualizzazione di 15:31:46 a quella di 15:31:47; ecc.). Sotto è riprodotto l'esito dell'analisi con Stat.

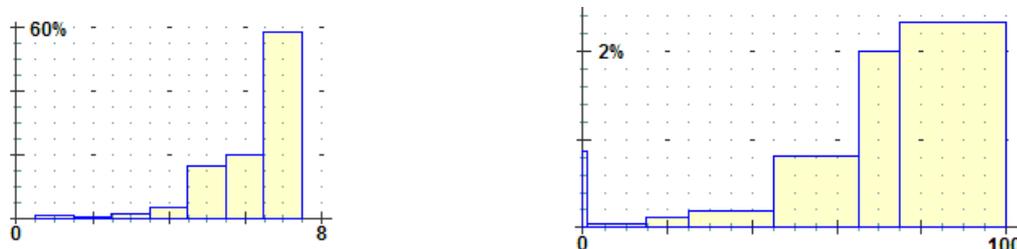
Nota. Le *misure* ottenute con l'orologio sono ***troncate*** ai centesimi di secondo. Alla ***media*** visualizzata devo quindi aggiungere 0.5, cioè considerare 99.42553+0.5 = *99.92553*, che poi posso arrotondare a 99.9.
Per una spiegazione consulta la seconda voce "valori medi" de *Gli oggetti matematici*.

- Tra i seguenti diagrammi, *qual* è il box-plot di T-Sec? Perché? Verifica la tua risposta usando Stat.

e12 Un ente pubblico ordina alla ditta SifanStat, specializzata in indagini statistiche, lo studio dei tempi di arrivo degli utenti ai propri sportelli. Un dipendente della SifanStat si piazza all'ingresso del locale in cui sono collocati gli sportelli e per circa un'ora, in un orario di punta, misura il tempo che intercorre tra l'arrivo di un utente e il successivo, contando complessivamente l'arrivo di 134 utenti. I tempi che ha rilevato (troncati ai secondi) sono riportati (in stf) come file di nome t-arrivi.stf. Sotto è riprodotto parzialmente lo stato dello schermo dopo l'analisi di "T-Arrivi" con Stat.

134 dati in 134 righe min,max: 1,173
media: 29.0522388 mediana: 21
moda: [0,10) freq.rel.modale: 25.3731%
5% :3 25% :9 50% :21
95% :84 75% :38

(a) *Completa* la parte punteggiata e indica in quante classi è stato suddiviso l'intervallo [0,200).
(b) Utilizzando solo gli output numerici del programma (min, max, percentili, media, moda) avresti potuto *concludere* qualcosa sull'andamento dell'istogramma?
(c) Tenendo conto della quantità dei dati a disposizione e del fatto che essi sono troncati, come puoi esprimere il *tempo medio* che intercorre tra due arrivi? [vedi le *note* ai quesiti precedenti]
(d) Tra i diagrammi riprodotti nel quesito precedente, *qual* è il box-plot di T-Arrivi? Perché? Verifica la tua risposta usando Stat.

e13 Stat consente di analizzare pure dati già classificati in intervalli, anche di diversa ampiezza (vedi l'Help). Consideriamo il file Mor4.stf, che contiene la distribuzione dell'età dei morti in Italia nel 1990.

[0,1) 46 [1,15) 25 [15,25) 58
[25,45) 186 [45,65) 870 [65,75) 1071
[75,100) 3124 5380 dati

I dati sono in centinaia di persone: ad es. sono morte 25 centinaia di persone nella fascia 1-14 anni (cioè in [1,15): avevano compiuto 1 anno e non ancora i 15).

La tabella-Istat da cui sono stati riportati i dati indicava l'ultima classe come "75 e più", cioè [75,∞), intervallo che non può essere introdotto con Stat poiché ∞ non è un numero finito. Si è introdotto [75,100) supponendo che sia trascurabile la percentuale dei morti ultracentenari.
(***a***) Utilizzando Stat *trova* l'età media dei morti nel 1990, l'intervallo in cui cade il 50% centrale delle età di morte e *traccia* l'istogramma relativo a "Mor4".

Nota. L'istogramma di distribuzione di dati già classificati in intervalli viene tracciato con rettangolini con basi proporzionali alle ampiezze degli intervalli, nel modo raffigurato a destra (per "Mor4"), non con rettangolini di ugual base, come è fatto a sinistra. L'altezza dei rettangoli viene modificata in modo che le loro aree rimangano proporzionali alle frequenze relative e sulla scala verticale vengono rappresentate le frequenze percentuali "unitarie".
Ad esempio [65,75) è rappresentato (figura a destra) da un rettangolo alto circa 2%; ciò significa che in un intervallo ampio *un* anno che sta in [65,75) cade mediamente il 2% delle età di morte (ad es. circa il 2% dei morti aveva 65 anni, il 2% ne aveva 66, …). Essendo [65,75) ampio 10 anni, in esso cade il 10·2%=20% delle età di morte. La stessa percentuale la possiamo ottenere direttamente se prima di cliccare [plot] mettiamo "%" nel riquadro a sinistra di [S].
Sull'istogramma di sinistra le colonne invece sono alte tanto quanto le percentuali.

[Istogrammi come quello di sinistra sono ottenibili introducendo i dati classificati in insiemi generici, non in intervalli, nella forma:
Per ulteriori informazioni vedi l'*help* e la voce "distribuzione" de *Gli oggetti matematici*]

a,46
b,25
...
g,3124

(***b***) Secondo te, come procede Stat per calcolare la media aritmetica quando i dati sono stati introdotti in forma classificata, come nel caso di "Mor4"?

e14 La tabella (6.1) contiene la distribuzione dell'età dei morti in Italia in vari periodi. I dati sono in centinaia di persone. Nel caso del decennio 1881-90 per ogni fascia di età è riportato il numero medio dei morti in un anno (ad es. nell'intervallo di anni di età [5,10) vi sono stati in media 343 centinaia di morti all'anno).

(6.1)

anni	0-4	5-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-74	75-∞
1881-90	3818	343	303	398	360	384	495	1177	708
1951	729	35	77	132	134	285	457	1401	1569
1988	68	10	31	66	70	161	423	1516	2983

(6.2)

età mediana	1881-90	1951	1988
del totale dei morti		66	
dei morti nella fascia 5-∞		69	

La tabella (6.2) indica (troncata agli interi) l'età mediana dei morti e l'età mediana di quelli morti dopo aver compiuto 5 anni.

• *Completa* la tabella usando *Stat*. Procedi nel seguente modo:
(*a*) I dati della tabella (6.1) sono registrati nei file "mor1" (1881-90), "mor2" (1951) e "mor3" (1988). Analizza questi file e completa la prima riga di (6.2) (e controlla la mediana del 1951).
(*b*) Modifica "mor1", "mor2" e "mor3" togliendo la prima riga di dati, in modo da rappresentare solo i morti con almeno 5 anni di età, e dà nomi "1", "2" e "3" ai file ottenuti.
(*c*) Analizza i nuovi file e completa la seconda riga di (6.2).
• Infine *commenta* la tabella (6.2) • Per confrontare gli istogrammi di "mor3" e di "mor4" [vedi ques. e13] conviene ricorrere a istogrammi non a basi uguali. Perché?

e15 Completata la tabella seguente, scegli tra 73 anni e 83 anni qual è stata nel 1988 l'età mediana dei morti maschi e quale quella dei morti femmine?

morti nel 1988 per classi di età

	0-59	60-74	75-∞	totale
M+F	829 (16%)	1516 (28%)	2983 (56%)	5328 (100%)
M	552 (20%)	946 (34%)	1278 (46%)	2776 (100%)
F				

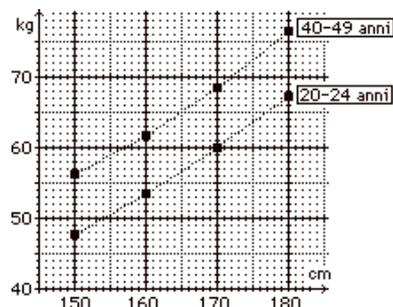
e16 La tabella (6.3) contiene il *peso medio* di maschi e femmine di altezza e fascia di età fissate. Contiene inoltre il "*peso ideale*" di maschi e femmine di età adulta; non viene indicato un unico dato, ma un intervallo: ad es. il peso ideale delle donne alte 150 cm può andare da 44 a 54 kg, nel senso che una donna alta 150 cm con scheletro particolarmente leggero ha come peso ideale 44 kg e una con scheletro particolarmente pesante ha come peso ideale 54 kg. Il peso ideale di una certa categoria di soggetti viene definito convenzionalmente come il peso a cui corrisponde l'età media di morte più alta (i soggetti con quel peso mediamente vivono più a lungo dei soggetti con altro peso).

(**6.3**)

indagine campionaria sulla popolazione italiana (anno 1990)

		peso medio (kg)		peso ideale (kg)	
	altezza (cm)	20-24 anni	40-49 anni	*da*	*a*
M	160	59.9	65.3	53	64
	170	65.7	72.9	56	72
	180	72.8	80.5	66	80
	190	80.4	88.9	73	89
F	150	47.7	56.3	44	54
	160	53.5	61.7	48	59
	170	59.8	68.4	54	67
	180	67.3	76.4	62	75

- Una ragazza robusta alta 160 cm e pesante 60 kg legge preoccupata in una "rivista femminile", in un articolo sulle diete, che il peso ideale di una donna della sua altezza è 50 kg. Perché ciò che è scritto sulla rivista è una stupidaggine?
- Un uomo di 45 anni e alto 180 cm, che a vent'anni pesava 64 kg, ora pesa 81 kg. Da una statistica sul giornale legge che a mezz'età un uomo della sua altezza pesa mediamente 80 kg. Ritenendo, allora, di avere un peso "normale", decide di non dare più importanza alle sollecitazioni della moglie («pesi troppo: stai più attento nel mangiare!»). Ti sembra sensata questa conclusione?

e17 I grafici a lato rappresentano il peso medio *P* in funzione dell'altezza *h* nel caso delle donne tra 20 e 24 anni e nel caso di quelle tra 40 e 49 anni (*ques. e16*). Il pallini sono la "traduzione" dei dati della tabella (6.3); le linee punteggiate che li congiungono consentono di trovare i pesi medi corrispondenti ad altre altezze (nell'ipotesi che tra un pallino e l'altro la variazione del peso medio sia proporzionale a quella dell'altezza). Trova così (arrotondato ai kg) il peso medio delle donne di 20-24 anni alte 167 cm e confrontalo con quello che ottieni usando direttamente i dati della tabella e un opportuno metodo numerico (§4 e q. e8).

e18 Potete effettuare delle altre indagini statistiche. Ad es. comprare qualche chilo di patate di una qualità fissata in un particolare negozio, pesare ciascuna patata e studiare come si distribuisce il peso delle patate, o fare un'indagine simile per qualche altro prodotto alimentare. Oppure potete scegliere un marciapiede di una grande strada, una direzione di cammino e misurare l'intervallo di tempo che intercorre tra il passaggio di un pedone e il successivo (scegliete un punto che non sia preceduto, a poca distanza, da un semaforo, che condizionerebbe il flusso delle persone) e studiare come si distribuiscono questi tempi. Oppure potete misurarvi (tutti gli alunni della classe non affebbrati) la temperatura corporea in più ore diverse e per più giorni consecutivi, raccogliere i dati e discutere che cosa si deve intendere come "temperatura normale".

1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini:

intervallo di numeri (dopo ques.3), *classificare in modalità* (dopo ques.4), *frequenza assoluta, relativa e percentuale* (dopo ques.5), *distribuzione di frequenza* (dopo ques.6), *classe modale* (§2), *mediana* (dopo fig.7), *frequenza cumulata* (dopo fig.11), *percentile* (dopo fig.15), *indagine campionaria* (§3).

2) Su un foglio da "quadernone", nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").

Le statistiche

Alcuni modelli per la rappresentazione dei dati

Scheda **4**

Gli abbandoni scolastici

0. Introduzione

In *questa scheda* ci soffermeremo su alcuni modi per descrivere (mediante variabili, simboli di operazione e parentesi; mediante opportune rappresentazioni grafiche) le relazioni che intercorrono tra dati diversi e su alcuni procedimenti per trasformarle.

Vedremo anche che la relazione tra un valore da calcolare e altri valori noti può avere formulazioni diverse che, pur essendo equivalenti dal punto di vista "algebrico", non sono tali dal punto di vista della "esecuzione del calcolo".

1. Formule per elaborare dati - Termini numerici

La *tabella (1.1)* contiene i dati relativi alle iscrizioni alle classi di un Istituto Tecnico Industriale (ITI) in due anni scolastici consecutivi.

(**1.1**)

		a.s. 2006/07		a.s. 2007/08	
		totale iscritti	ripetenti	totale iscritti	ripetenti
		A	**B**	**C**	**D**
classe 1ª	**1**	181	81	154	36
classe 2ª	**2**	146	38	126	35
classe 3ª	**3**	245	48	140	37
classe 4ª	**4**	263	31	197	22
classe 5ª	**5**	234	4	232	1

E` una tabella in cui le righe sono indicate da numeri e le colonne da lettere, con una notazione simile a quella impiegata spesso nelle piantine delle città. Così il numero degli iscritti alla 1ª nell'a.s. 2006/07 è contenuto nella casella (o cella) A1, il numero degli iscritti alla 4ª nell'a.s. 2007/08 che ripetono l'anno è contenuto nella cella D4, …. Con la stessa notazione della cella indichiamo anche il dato in essa contenuto. Ad esempio A1 è il numero degli iscritti alla 1ª nel 2006/07.

La *tabella (1.2)* contiene dati analoghi relativi a un Liceo Scientifico (LS).

(**1.2**)

		a.s. 2006/07		a.s. 2007/08	
		totale iscritti	ripetenti	totale iscritti	ripetenti
		A	**B**	**C**	**D**
classe 1ª	**1**	149	25	152	27
classe 2ª	**2**	128	18	129	20
classe 3ª	**3**	135	10	111	10
classe 4ª	**4**	120	7	124	4
classe 5ª	**5**	125	2	115	1

In ogni cella è contenuto il medesimo tipo di informazione presente nella corrispondente cella della tabella (1.1), anche se il valore numerico dell'informazione cambia da una scuola all'altra. Ad esempio A3 rappresenta in entrambi i casi il numero degli iscritti alla 3ª nel 2006/07, ma in un caso A3 vale 245, nell'altro vale 135.

In altre parole A3 è una ***variabile*** (→ voce "formule" in *Gli oggetti matematici*). In genere le variabili sono indicate con una lettera eventualmente seguita da altre lettere o da cifre o altri simboli particolari: abbiamo visto vari esempi nelle schede precedenti, altri li vedremo in seguito (*parte*, *totale*, *x*, *y*, *dato1*, *dato2*, *n*, v_{andata}, x', *n.dati*, *ValoreIniziale*, …).

Anche C4 e D4 sono variabili; rappresentano rispettivamente il numero complessivo degli iscritti alla 4ª nel 2007/08 e il numero di quelli ripetenti. L'espressione C4-D4 è un termine che indica il risultato della sottrazione di D4 da C4, rappresenta cioè il numero di iscritti alla 4ª che non sono ripetenti.

1 Scrivi delle espressioni che indichino come ottenere (a partire da una delle precedenti tabelle) i seguenti valori:

- il n° dei ripetenti iscritti alla 2ª nel 2006/07: ....
- il n° degli iscritti alla 2ª nel 2006/07 che non sono ripetenti: ....
- il rapporto tra il n° degli iscritti alla 2ª non ripetenti e il totale degli iscritti alla 2ª nel 2006/07 ....
- il rapporto tra gli iscritti alla 5ª nel 2006/07 e il totale degli iscritti alla scuola: ....

2 Viceversa, descrivi a parole il significato dei seguenti termini (cioè il tipo di informazione che si può ottenere con essi a partire dalle tabelle)

- C5 ....
- C5-D5 ....
- (C5-D5)/C5 ....
- C3/(C1+C2+C3+C4+C5) ....

3 Individua i valori numerici dei seguenti termini per ciascuna delle due scuole e indica quali rappresentano l'incidenza percentuale del fenomeno della ripetenza al 1° anno.

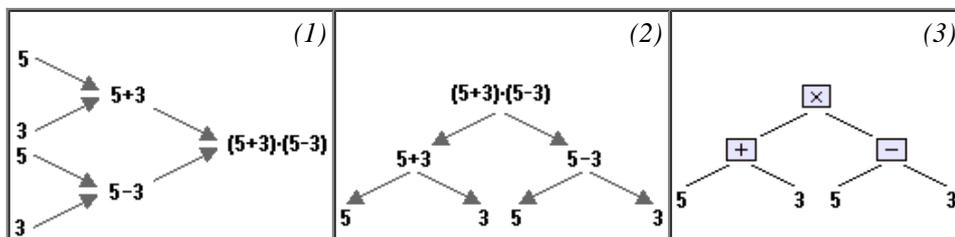
- B1/A1·100 ITI: .... LS: ....
- B1/(A1·100) ITI: .... LS: ....
- (B1/A1)·100 ITI: .... LS: ....

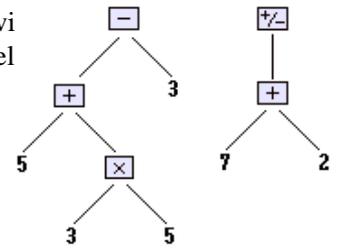
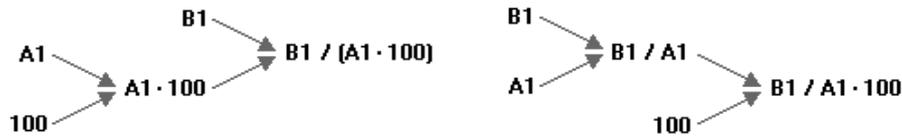
4 Sia *p* la percentuale degli iscritti al 1° biennio nel 2006/07 che sono ripetenti, cioè sia:
p = (B1+B2)/(A1+A2)·100. Sai riscrivere questa formula senza usare parentesi?
p =

5 Se disponi di una CT senza tasti di parentesi come puoi calcolare *p* (vedi quesito 4) senza trascrivere risultati di calcoli intermedi sulla carta?

Ricordiamo che (→ *Gli oggetti matematici*) un ***termine*** (*numerico*) è un'espressione "costruita" a partire da variabili e costanti attraverso l'*applicazione di funzioni* ("4 operazioni", radice quadrata, elevamento a potenza, cambio-segno, valore assoluto, …). In analogia con la chimica (in cui l'atomo è la più piccola parte di un elemento che conserva le proprietà chimiche dell'elemento stesso), costanti e variabili vengono chiamate anche ***atomi***.

Ad esempio se alle costanti 5 e 3 applico la addizione o la sottrazione ottengo i termini 5+3 e 5-3; se a questi termini applico la moltiplicazione ottengo il termine (5+3)·(5-3). Non ho scritto 5+3·5-3 ma ho racchiuso tra parentesi i termini 5+3 e 5-3 in modo da chiarire che la moltiplicazione era applicata ad essi nella loro interezza, non solo a 3 e 5. Le parentesi servono per delimitare all'interno di un termine i "pezzi" che ne rappresentano dei ***sottotermini***, cioè i termini di cui dobbiamo calcolare il valore per ottenere il valore del termine complessivo: (5+3)·(5-3) viene ***interpretato*** come la moltiplicazione avente per termini 5+3 e 5-3: dobbiamo prima calcolare il valore di ciascuno di questi sottotermini e poi calcolare il valore del termine complessivo.

La struttura di un termine può essere visualizzata mediante schemi come i seguenti, relativi al termine (5+3)·(5-3):

Lo schema (*1*) illustra la *costruzione* del termine a partire dai suoi atomi. Lo schema (*2*), in cui le frecce sono invertite rispetto allo schema (*1*), *analizza* la struttura del termine (scomposizione in sottotermini man mano più elementari, fino ad arrivare agli atomi). Lo schema (*3*) è una *descrizione* del termine (5+3)·(5-3) che esplicita soltanto gli atomi e le funzioni impiegate per costruirlo.

6 Disegna gli schemi del tipo (2) relativi ai termini descritti a fianco. Scrivi poi le corrispondenti sequenze di assegnazioni elementari, come nel precedente esempio.

Gli schemi seguenti illustrano la differenza dei termini B1/(A1·100) e B1/A1·100, considerati nel quesito 3.

Come sai, quando i sottotermini non sono evidenziati da parentesi, l'ordine di esecuzione viene stabilito con ulteriori regole. Ad esempio:

1 • 5+3·5 viene interpretato come 5+(3·5), cioè come la addizione applicata ai termini 5 e 3·5; non bisogna calcolare il valore di 5+3 per ottenere il valore finale: 5+3 *non* è da intendere come un sottotermine di 5+3·5

2 • A1/B1·100 viene interpretato come (A1/B1)·100

3 • $\frac{10}{100}+\frac{30}{100}-\frac{20}{100}$ viene interpretato come $(\frac{10}{100}+\frac{30}{100})-\frac{20}{100}$

4 • $3+10^{2+4}$ viene interpretato come $3+(10^{2+4})$, *non* come $(3+10)^{2+4}$

5 • un passivo di 1 milione può essere indicato con -10^6; infatti -10^6 viene interpretato come $-(10^6)$, *non* come $(-10)^6$, che invece vale $(-10)\cdot(-10)\cdot(-10)\cdot(-10)\cdot(-10)\cdot(-10)=10^6$ (ogni moltiplicazione per un numero negativo cambia il segno, quindi alla fine si ottiene un risultato positivo), cioè rappresenta un attivo di 1 milione.

In alcuni casi (esempi **2** e **3**) si procede dando la precedenza alla prima operazione incontrata, in altri casi la precedenza viene stabilita diversamente. Più precisamente:

(**1.3**) Si stabiliscono i seguenti livelli di ***priorità tra le operazioni:***
– elevamento a potenza
– moltiplicazione e divisione
– cambio segno
– addizione e sottrazione

(**1.4**) Nel caso in cui una espressione che compare nel termine possa essere intesa come applicata a due diverse operazioni [ad es. A1 in B1/A1·100 può essere intesa come secondo termine di "/" o come primo termine di "·"], si sceglie l'operazione prioritaria secondo l'elenco (1.3) o, se le operazioni sono di pari livello (due addizioni, un'addizione e una sottrazione, una divisione e una moltiplicazione, …), si dà la precedenza alla prima operazione (cioè a quella più a sinistra) [A1 viene intesa come termine di "/" poiché "·" è di pari livello e viene dopo].

• Nell'esempio **1** il termine 3 è a fianco sia del simbolo "+" che del simbolo "·". In base all'elenco (1.3) "·" ha la priorità, quindi il termine complessivo viene interpretato come 5+(3·5).

• Nell'esempio **3** potrei intendere 30/100 o come 2° termine dell'addizione, cioè da usare per il calcolo di (10/100)+(30/100), o come 1° termine della sottrazione, per il calcolo di (30/100)-(20/100). Poiché addizione e sottrazione hanno lo stesso livello di priorità viene data la precedenza alla prima operazione, cioè all'addizione.

• Nell'esempio **4** possiamo intendere 10 come termine sia dell'addizione che dell'elevamento a potenza. Poiché la seconda operazione ha priorità in base all'elenco (1.3) lo consideriamo come termine di questa.

Osserviamo che:

- La scrittura "a due piani" della divisione consente di scrivere $\dfrac{a+3}{2+b}$ invece di (a+3)/(2+b).
- Viceversa, se si vuole scrivere l'elevamento a potenza usando una scrittura "a un piano" si può impiegare il simbolo "^" e scrivere 10^(2+3) invece di 10^{2+3}.
- A volte si usano scritture diverse anche per la radice quadrata; ad esempio si scrive √(100+400) invece di $\sqrt{100+400}$.

Abbiamo già osservato che non tutte le *CT* sono costruite in modo da rispettare le priorità tra le operazioni (*La automazione*, scheda 2, §2).

I linguaggi di programmazione, invece, in genere le rispettano.

Anche il programma Poligon (*Le statistiche*, scheda 2, §4) le rispetta. A fianco è riprodotto la parte dell'help che le richiama.

```
x-2*3 sta per x-(2*3)
x+2/3 sta per x+(2/3)
4^2/5 sta per (4^2)/5
6/7^9 sta per 6/(7^9)
-3^2  sta per -(3^2)
-6*x  sta per -(6*x)
```

7 Introduci parentesi nei termini seguenti in modo che una persona che non conosca le priorità descritte in (1.3) e (1.4) possa interpretarli correttamente [il primo termine è già completato come esempio].

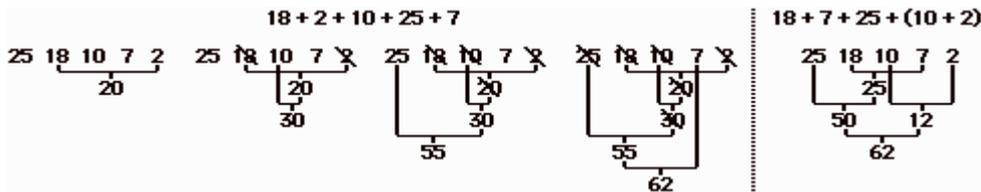
$a + b - c^2$ → $(a + b) - (c^2)$

a + b / c → ....

a - b + c → ....

$3 \cdot 10^2$ → ....

(a + b) / 2 + a → ....

Il valore del termine B1+B2+B3+B4+B5 riferito alla tabella (1.2), cioè il totale degli iscritti al LS nel 2006/07 che stavano ripetendo la classe, può essere calcolato così come è indicato dalla scrittura del termine, cioè, in base alla convenzione (1.4), eseguendo la prima addizione (B1+B2), poi la seconda (RisultatoPrecedente + B3), … . Sostituendo alle variabili i loro valori: 25+18+10+7+2 = 43+10+7+2 = 53+7+2 = 60+2 = 62. Tuttavia calcolando mentalmente la somma 25+18+10+7+2 può convenire procedere diversamente, ad esempio nel modo indicato sotto a sinistra (per sfruttare il fatto che 18+2 fa 20), operando come se il termine fosse 18+2+10+25+7, o quello indicato a destra (per sfruttare il fatto che 18+7 fa 25), operando come se il termine fosse 18+7+25+(10+2).

8 Calcola mentalmente la somma 17+16+4+3 nel modo che ritieni più conveniente e scrivi il termine che corrisponde al modo in cui hai operato. ....

In ciascuno di questi calcoli mentali abbiamo *riordinato* i termini di una sequenza di addizioni.

Questi riordinamenti non modificano il risultato, come è illustrato per due casi particolari nella *figura 1*.

A
14 9
9 14
23

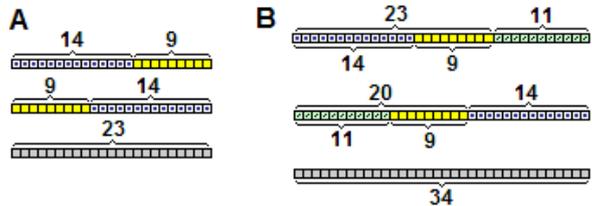
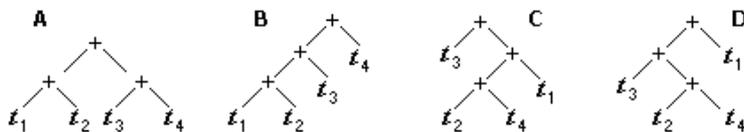



figura 1

9 Associa a $\sqrt{3} + \dfrac{3x}{7} + 4 + w$ e agli altri due termini il grafo corrispondente.

$\sqrt{3} + \dfrac{3x}{7} + 4 + w$ ...... $4 + w + (\dfrac{3x}{7} + \sqrt{3})$ ...... $4 + (\dfrac{3x}{7} + w + \sqrt{3})$ ......

t_1 t_2 t_3 t_4

A B C D

10 Nella figura *1-A* è esemplificata in particolare l'equivalenza tra $t_1 + t_2$ e $t_2 + t_1$ (dove t_1 e t_2 sono termini numerici). Come si chiama questa proprietà dell'addizione?

Chiamiamo ***proprietà del riordino*** (dell'addizione) la proprietà più generale, cioè:

(**1.5**) *Due termini ottenuti entrambi applicando ripetutamente l'**addizione** a partire dagli stessi sotto-termini* $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *sono **termini equivalenti**.*

11 Per la sottrazione vale la proprietà del riordino? [motiva la risposta]

La possibilità di riscrivere una differenza sotto forma di addizione (***a* – *b* → *a* + –*b***) consente, come già visto, di riscrivere una sequenza di addizioni e sottrazioni in una di sole addizioni, in modo da poterla riordinare.

12 Completa la seconda trasformazione in analogia alla prima, in cui si sono trasformate le sottrazioni in addizioni per poi poter effettuare un riordino:

$\sqrt{5} - 4 - x + 7 \quad \to \quad \sqrt{5} + -4 + -x + 7 \quad \to \quad 3 + \sqrt{5} + -x$

$-13 - 9 + 113 + 79 \quad \to \quad \ldots + \ldots + \ldots + \ldots \quad \to \quad \ldots + \ldots + (\ \ldots + \ldots\ ) \quad \to \quad 113 - 13 + (79 - 9)$

2. Grafi di flusso, equazioni, incognite

Abbiamo visto (quesito 3) che nel 2006/07 nelle prime dell'ITI il 44.8% erano ripetenti, contro il 16.8% del liceo. Queste percentuali non consentono di dare una valutazione adeguata del fenomeno degli insuccessi scolastici. Ad esempio nel caso delle classi 1[e] dell'ITI:

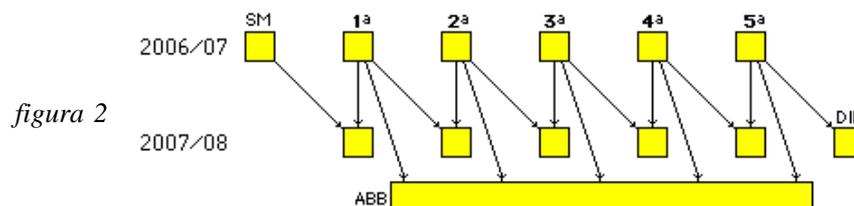
– sarebbe opportuno tener conto di quanti erano gli iscritti in 1[a] nell'anno precedente: se nel 2005/06 gli iscritti alla 1[a] fossero molto più dei 181 del 2006/07, gli 81 ripetenti costituirebbero una percentuale di bocciati inferiore al 44.8%;
– inoltre occorrerebbe tener conto di quanti dei bocciati in 1[a] nel 2005/06 non si sono ri-iscritti.

Cerchiamo di elaborare delle informazioni più significative, che tengano conto dei flussi di alunni da una classe all'altra e degli abbandoni.
Consideriamo l'ITI. Supponiamo, per semplicità, che nei due anni scolastici considerati nessuno studente si sia trasferito in un'altra scuola secondaria superiore e che non si siano iscritti studenti provenienti da altre scuole secondarie superiori.

Degli iscritti alla 1[a] nell'a.s. 2006/07 alcuni sono stati promossi in 2[a], alcuni sono stati bocciati e ripetono la 1[a] nel 2007/08, altri ancora, promossi o bocciati, non si sono riiscritti nel 2007/08: *hanno abbandonato* la scuola. Un fenomeno analogo si verifica per gli altri anni di corso.

La *figura 2* illustra il *flusso degli alunni tra il 2006/07 e il 2007/08*.

Il riquadro SM indica l'insieme degli alunni che nel 2006/07 frequentavano la scuola media inferiore e che nel 2007/08 sono diventati nuovi alunni dell'ITI. Il riquadro DIP indica l'insieme dei ragazzi che alla fine del 2006/07 hanno superato positivamente l'esame finale di 5[a], cioè che da alunni si sono trasformati in diplomati. Il riquadro ABB indica coloro che nel 2007/08 non si sono iscritti all'ITI pur non avendo concluso gli studi, cioè coloro che hanno abbandonato. Gli altri riquadri indicano le varie classi.

figura 2

Un diagramma di questo genere viene chiamato ***grafo di flusso***. I vari riquadri vengono detti ***nodi*** . Le ***frecce*** che li collegano vengono spesso chiamate *archi*.
I nodi in cui non arrivano frecce vengono detti *nodi iniziali*, quelli da cui non partono frecce vengono detti *nodi finali*.

Nel nostro caso tutti i riquadri che si riferiscono alla condizione degli alunni nel 2006/07 sono nodi iniziali mentre quelli che si riferiscono alla condizione nel 2007/08 (compresi ABB e DIP) sono nodi finali (se estendessimo il grafo considerando anche l'anno scolastico 2008/09 i nodi relativi al 2007/08 non sarebbero più finali perché da essi partirebbero frecce verso i nodi relativi all'anno successivo).

Vogliamo quantificare i flussi di alunni, cioè mettere in ciascun riquadro il numero degli alunni che si trovano nella condizione indicata e mettere a fianco di ogni freccia il numero di alunni che passano dalla condizione di partenza alla condizione di arrivo. La tabella (1.1) ci fornisce i valori corrispondenti solo ad alcuni riquadri e ad alcune frecce. Vediamo se è possibile determinare i valori mancanti.

Iniziamo cercando qual è il numero degli studenti che, nel periodo considerato, vengono *promossi dalla 1ª alla 2ª*.

Possiamo completare il grafo di flusso come in *figura 3* (cioè mettere nei nodi e a fianco delle frecce i valori che ci sono *noti* dalla tabella (1.1)) e cercare di individuare il valore del particolare flusso che ci interessa (passaggio dalla 1ª alla 2ª), cioè il valore da mettere al posto del "?".

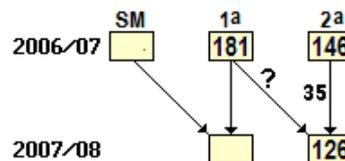



figura 3

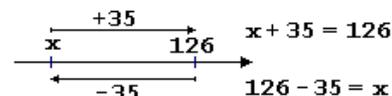
Poiché il valore associato a un nodo è la somma dei valori associati alle frecce che vi arrivano, dobbiamo trovare il valore che nella seguente equazione (2.1) occorre sostituire a "?", ovvero quello che occorre sostituire a *x* nell'equazione (2.2), affinché la relazione che esse esprimono sia verificata.

(**2.1**) ? + 35 = 126 (**2.2**) $x + 35 = 126$

Ricordiamo che un'***equazione*** è una espressione del tipo: *termine1*=*termine2*. *termine1* e *termine2* vengono chiamati, rispettivamente, *primo* e *secondo termine* [o *membro*] dell'equazione.

Possiamo descrivere il nostro problema dicendo che dobbiamo *risolvere l'equazione* (2.2) *rispetto a x*. La variabile impiegata per indicare il valore da trovare viene detta ***incognita***. Il valore trovato viene chiamato ***soluzione*** dell'equazione.

Questa equazione può essere trasformata facilmente nella forma $x = \ldots$: come evidenzia la figura a fianco, x + 35 = 126 equivale a 126 – 35 = x, ossia a x = 126 – 35.

+35 x 126 –35 x + 35 = 126 126 – 35 = x

Posso vedere ciò anche come un caso particolare della equivalenza tra **a+b=c** e **a=c–b** (→ "formule" in *Gli oggetti matematici*).

Posso anche dire: per *isolare* la variabile *x* devo annullare "+35" (cioè la funzione x ↦ x + 35) e per ottenere ciò trasformo l'equazione applicando a entrambi i suoi membri l'*operazione inversa* "–35" (x ↦ x – 35):

z → +35 → –35 → *z*

(1) x + 35 = 126 ◂ equazione iniziale

(2) x + 35 – 35 = 126 – 35 ◂ ho applicato "–35"

(3) x = 126 – 35 ◂ la funzione "+35" è stata annullata dalla funzione inversa "–35"

(4) x = 91 ◂ ho effettuato i calcoli numerici

13 Completa il seguente grafo scrivendo gli altri dati della tabella (1.1) che corrispondono a frecce o riquadri.

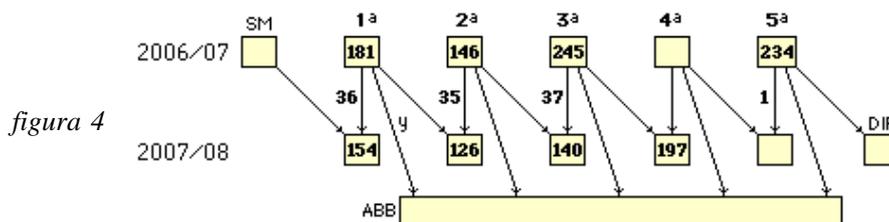
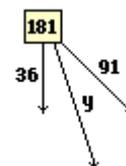



figura 4

Come posso calcolare il numero degli *studenti che nel 2006/07 erano iscritti alla 1ª e nel 2007/08 non si sono più iscritti a scuola*, cioè che hanno abbandonato gli studi?

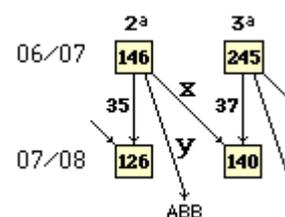
Devo trovare il numero y da associare alla freccia che parte dal riquadro [181] e arriva nel riquadro ABB.

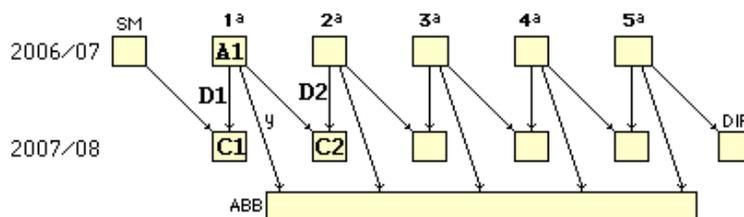
Ho già trovato che il valore associato alla freccia che da [181] va in [126] è 91.

Quindi, poiché il valore associato a un nodo è la somma dei valori associati alle frecce che escono da esso, ho:

$$181 = 36 + y + 91$$

Cerco di isolare y:

(1)	181 = 36 + y + 91	◄ equazione iniziale
(2)	181 = y + 36 + 91	◄ trasformo il 2° membro nella forma y+… usando (1.5)
(3)	181 = y + 127	◄ effettuo i calcoli numerici
(4)	181 – 127 = y + 127 – 127	◄ applico "–127"
(5)	181 – 127 = y	◄ la funzione "+127" è annullata dalla sua inversa "–127"
(6)	54 = y	◄ effettuo i calcoli numerici
(7)	y = 54	◄ scambio tra loro i membri dell'equazione

14 Calcola in maniera analoga il numero degli *studenti che nel 2006/07 erano iscritti alla 2ª e nel 2007/08 non si sono più iscritti a scuola* aiutandoti con il grafo a fianco.

Se voglio trovare il numero degli studenti che nel 2006/07 erano iscritti alla 1ª e nel 2007/08 non si sono più iscritti nel caso di altre scuole *senza ripetere ogni volta tutto il procedimento* con cui siamo passati dall'equazione 181 = 36 + y + 91 all'equazione y = 54 mi conviene *procedere una volta per tutte impiegando **variabili** invece che numeri*.

15 A tal fine completa il grafo seguente, che generalizza quello della figura 4 (cioè metti variabili al posto dei numeri impiegati nel grafo di figura 4).

Come nel caso dell'ITI, dobbiamo trovare il valore *y* della freccia che va da A1 a ABB. Invece di 181 = 36 + y + 91 (→ figura 4) abbiamo (→ figura soprastante) : A1 = D1 + y + (C2 – D2).

Procediamo come per 181 = 36 + y + 91.

(1)	A1 = D1 + y + (C2 – D2)	◄ equazione iniziale
(2)	A1 = D1 + y + C2 – D2	◄ riordino il 2° membro
(3)	A1 = y + D1 + C2 – D2	◄ lo riordino ulteriormente per arrivare alla forma y+…
(4)	A1 + D2 = y + D1 + C2 – D2 + D2	◄ applico "+D2"
(5)	A1 + D2 = y + D1 + C2	◄ la funzione "–D2" è annullata dalla sua inversa "+D2"
(6)	A1 + D2 – C2 – D1 = y	◄ analogamente, annullo al 2° membro "+D1" e "+C2"
(7)	y = A1 + D2 – C2 – D1	◄ scambio tra loro i membri dell'equazione

16 Completa la seguente tabella [non risolvere altre equazioni ma osserva sul grafo soprastante come passando da una classe alla successiva cambiano i nomi delle variabili]:

		ITI	LS
iscritti alla 1ª nel 2006/07 che non si sono più iscritti	A1 + D2 – C2 – D1	54	
iscritti alla 2ª nel 2006/07 che non si sono più iscritti			
iscritti alla 3ª nel 2006/07 che non si sono più iscritti			

17 Completa la seguente tabella:

	espressione generale	valore (in %) ITI	LS
$\dfrac{\text{iscritti alla 1}^{a}\text{ nel 2006/07 che non si sono più iscritti}}{\text{iscritti alla 1}^{a}\text{ nel 2006/07}}$			

Tale rapporto (nel caso dell'ITI: "54 su 181", cioè 0.298) si chiama *tasso di abbandono* dalla classe prima alla classe seconda. Esso ci dice che il numero degli abbandoni è pari a *TotaleIscritti* · 0.298. Se espresso in forma percentuale (29.8% = [arrotondando] 30%), si legge anche "ogni 100 studenti iscritti 30 abbandonano".

Analogamente si parla di ***tasso*** di interesse (su un prestito, su un deposito bancario, …) per indicare il rapporto tra interesse e somma iniziale, cioè quante lire di interesse vengono pagate ogni 100. Ad esempio, l'interesse pagato a una banca per un prestito di 70 000 € gravato da un interesse del 5% è:

$$\textit{interesse} = 70\,000\text{ €} \cdot \frac{5}{100} = 70\,000\text{ €} \cdot 0.05 = 3500\text{ €}$$

Tassi di abbandono analoghi a quelli trovati valgono anche *a livello nazionale*. Potete confrontare i dati qui analizzati con quelli ufficiali, sia italiani che relativi alla vostra regione, che potete ricavare in rete dal sito dell'ISTAT. Dietro a questo fenomeno vi sono molti fattori.

Ad es. in genere la valutazione è più rigorosa rispetto a quella praticata nella scuola media. Ciò può essere motivato con il fatto che la scuola superiore fornisce dei titoli di studio che devono garantire il possesso di una preparazione professionale o culturale adatta a svolgere un certo mestiere o ad accedere a certi studi universitari.

Un altro fattore è la presenza di problemi di *raccordo* tra i livelli scolastici: tra scuola media inferiore e scuola media superiore (ma anche tra scuola superiore e università, e, in parte, tra scuola elementare e scuola media): a volte si dà per scontato che gli alunni all'ingresso nella scuola superiore sappiano cose che non hanno studiato, o non si considerano e approfondiscono le cose che invece hanno studiato; altre volte non c'è raccordo tra i programmi scolastici seguiti (vi sono molte scuole superiori che non seguono le indicazioni nazionali in relazione sia ai contenuti dell'insegnamento che al raccordo che deve esservi tra le diverse discipline); …

Vi sono poi questioni sociali più complesse, su cui non ci soffermiamo.

3. Esercizi

e1 Abbiamo visto che *l'uso di variabili e di formule è comodo per* ***descrivere*** *in forma concisa* (cioè breve) *e precisa* ***un procedimento di calcolo***.

(**a**) Per poter ottenere alcune agevolazioni economiche nell'iscrizione a una particolare università occorre che il reddito totale annuo della famiglia non sia troppo elevato. Il reddito viene valutato mediante un *indice capitario* che deve essere inferiore a un certo limite. Nel 2009 sul bando che descrive le modalità per accedere alle agevolazioni veniva così indicato come calcolare l'indice capitario:

«Prendi il reddito annuo lordo in € (cioè senza escludere quanto versato come imposta), sottrai 6000, dividi per il numero dei componenti della famiglia e infine dividi per 1000»

Se indichiamo con I l'indice capitario, con R il reddito lordo totale della famiglia e con N il numero dei componenti, *quale* o quali delle seguenti formule traducono il procedimento sopra descritto? *Quanto* vale I secondo le tre formule nel caso di una famiglia di 4 persone con reddito lordo complessivo di 70 000 €?

(1) $I = \dfrac{R - 6\,000}{\dfrac{N}{1\,000}}$ (2) $I = \dfrac{\dfrac{R - 6\,000}{N}}{1\,000}$ (3) $I = R - \dfrac{6\,000}{\dfrac{N}{1\,000}}$

(**b**) Supponiamo di disporre di una tabella come quella sottostante, che riporti, per vari anni, i seguenti dati: popolazione con età compresa tra 6 e 13 anni (inclusi), popolazione con età compresa tra 6 e 18 anni (inclusi), numero degli studenti iscritti alla scuola elementare o alla scuola media inferiore, numero totale degli studenti iscritti a scuola (esclusa l'università e altre forme di istruzione post-diploma).

	A	B	C	D
anno	6-13 anni	6-18 anni	elem. e media inf.	totale scuola
…	…	…	…	…

Vogliamo analizzare come è cambiato negli anni il tasso di frequenza alla scuola secondaria superiore, cioè il rapporto tra il numero degli alunni di scuola secondaria superiore e quello dei ragazzi tra i 14 e i 18 anni.

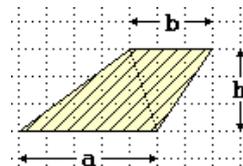
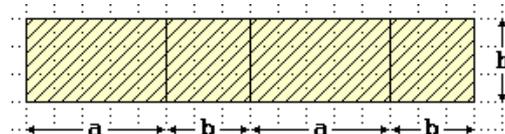
Quale o quali tra le seguenti formule ti permettono di effettuare il calcolo? *Motiva* la risposta esplicitando il significato di ogni sottotermine della formula che hai scelto.

(1) $\text{TassoFreq} = \dfrac{D-C}{B-A}$ (2) $\text{TassoFreq} = \dfrac{A-C}{B-D}$ (3) $\text{TassoFreq} = \dfrac{B-A}{D-C}$

e2 *L'uso di variabili per rappresentare un procedimento di calcolo consente, a volte,* anche di analizzare meglio il procedimento impiegato e *di* ***individuare dei procedimenti*** *equivalenti, ma* ***più semplici***.

(**a**) Per calcolare l'area della figura a fianco possiamo sommare le aree dei due triangoli evidenziati, cioè fare a·h/2 + b·h/2.

Ma, trasformando i due addendi e raccogliendo a fattor comune il sottotermine h·(1/2), otteniamo:

$$\frac{a\cdot h}{2} + \frac{b\cdot h}{2} = a\cdot h\cdot \frac{1}{2} + b\cdot h\cdot \frac{1}{2} = (a+b)\cdot h\cdot \frac{1}{2} = \frac{(a+b)\cdot h}{2}$$

Si vuole calcolare l'area complessiva delle pareti di una stanza da tappezzare; nel calcolo non si tiene conto delle porte e delle finestre (infatti si può risparmiare qualche ritaglio di carta ma non dei tratti interi di rotolo). Sotto è raffigurato lo sviluppo piano delle quattro pareti. *Scrivi* una formula che consenta di calcolare l'area a partire dalle dimensioni *a*, *b* e *h* effettuando il minor numero possibile di calcoli. *Motiva* la risposta.

(**b**) Non sempre è facile trasformare un termine in un termine più semplice da calcolare. Ad esempio, in uno scritto del 1610 (in un'epoca in cui già si usavano nomi per rappresentare numeri generici ma non era ancora studiato e diffuso il calcolo simbolico) un matematico si "porta dietro" per molti passaggi un termine come (b+c)·k–k·c senza accorgersi che (distribuendo k e riordinando) diventa b·k:

$$(b+c)k-kc = bk+ck-kc = bk+ck-ck = bk+(ck-ck) = bk+0 = bk$$

In uno scritto del 1620 il risultato di un problema di geometria è scritto nella forma sotto riportata. Prova a riscriverlo in una forma più semplice (indicando i procedimenti di riscrittura che hai impiegato).

$$V = a(m+n)+m(b-a)-na$$

e3 *Un'equazione contenente più variabili permette di descrivere in maniera sintetica le relazioni che intercorrono tra più grandezze*. Spesso, con opportune trasformazioni, è possibile *riscriverla esprimendo* ***una grandezza in funzione di altre***. Ad esempio se α, ß e γ sono le misure in gradi degli angoli di un triangolo sappiamo che vale la seguente proprietà: α+ß+γ=180. Da essa possiamo ricavare, ad esempio, α in funzione di ß e γ:

$$\alpha + ß + \gamma = 180 \iff \alpha + (ß + \gamma) = 180 \iff \alpha = 180 - (ß + \gamma)$$

(**a**) Dalla formula che esprime la misura in °F (**f**) in funzione della misura in °C (**c**) ricava la formula inversa (che esprime **c** in funzione di **f**):

$$\mathbf{f} = 32 + 1.8\mathbf{c} \iff \ldots = 1.8\mathbf{c} \iff \ldots = \mathbf{c} \iff \mathbf{c} = \ldots$$

(**b**) Considera la prima figura del quesito *e2*. Esprimi b in funzione di a, h e A:

$$A=(a+b)h/2 \iff 2A = \ldots \iff 2A/h = \ldots \iff \ldots = b \iff b = \ldots$$

e4 Anche nella scuola media inferiore esiste il fenomeno dell'abbandono scolastico, anche se è meno vistoso di un tempo. Vediamo come posso utilizzare le seguenti tabelle per studiare come l'*abbandono della scuola media inferiore* (iscritti che non completano gli studi) si manifestava nell'Italia Settentrionale e Centrale (SC) e nell'Italia Meridionale e Insulare (MI) negli anni 80.

	somma degli iscritti in 1ª dal 1980/81 al 1983/84	somma degli iscritti in 1ª ripetenti negli stessi anni	licenziati dal 1982/83 al 1985/86
	A	**B**	**C**
SC	2384	233	2064
	A	**B**	**C**
MI	1729	273	1246

Ho considerato gli iscritti in 1ª di quattro anni scolastici successivi e i licenziati nel quadriennio slittato in avanti di due anni, in quanto uno studente che completa regolarmente gli studi consegue la licenza media alla fine dell'anno scolastico di due anni successivo a quello in cui si è iscritto alla classe prima.

Per non conteggiare più volte le persone che hanno ripetuto la 1ª devo sottrarre i dati B dai dati A (ad es. un iscritto alla 1ª nell'80/81 che nell'81/82 ripeta la classe viene conteggiato due volte nella colonna A).

Quale tra le seguenti formule permette di calcolare il *tasso di licenza*, cioè la percentuale delle persone entrate nella scuola media che ne escono completando gli studi?

(1) (A-B)/A (2) C/(A-B (3) (A-B)/C (4) C/A

e5 Mediante la formula individuata nel quesito precedente si ottiene che il tasso di licenza nel periodo considerato è del 96% in SC e dell’86% in MI. Utilizzando questi dati trova i rispettivi tassi di abbandono della scuola media. Discutete quali possono essere i fattori principali del grosso divario tra i due tassi che ottenete, facendo anche riferimento ad aspetti analizzati nella scheda 1.

1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini:

termine e *atomi* (dopo ques.5), *sottotermine* (dopo ques.5), *grafo di flusso* (§2), *equazione* (dopo fig.3), *incognita* (dopo fig.3), *riordinare una somma* (dopo ques.8).

2) Su un foglio da "quadernone" (che poi inserirai dopo l'ultima pagina della scheda), nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").

La automazione

Dalle macchine semplici alle macchine programmabili

Scheda **3**

Il calcolatore

1. Dalla calcolatrice al calcolatore

Alle calcolatrici non programmabili possiamo far eseguire solo singole operazioni di:

- addizione, moltiplicazione, … ,
- calcolo di altre funzioni il cui programma è stato incorporato dal costruttore,
- immagazzinamento o estrazione di dati dalla memoria-utente.

A un ***calcolatore*** (o *computer* o *macchina calcolatrice programmabile*) possiamo far gestire l'esecuzione di un generico algoritmo che gli possiamo descrivere. Consideriamo ad esempio il *calcolo della ripartizione percentuale* di una serie di dati. Usando una CT possiamo procedere in questo modo:

(1) batto 100
(2) batto [÷] (**1.1**)
(3) batto *totale*
(4) batto [=] faccio calcolare il fattore di proporzionalità per cui moltiplicare i dati
(5) batto [M] ([M+] o [STO] o …) lo faccio mettere nella memoria
(6) batto *dato*
(7) batto [×]
(8) batto [MR] ([RCL] o …)
(9) batto [=] faccio calcolare il fattore la percentuale di *dato* rispetto a *totale*
(10) ritorno a (6)

Come si vede, è l'utente che deve gestire l'esecuzione dell'*algoritmo (1.1)*, cioè comandare alla CT man mano quale operazione compiere.

I calcolatori sono invece in grado di "leggere" e tradurre automaticamente in una sequenza di ***operazioni-macchina*** (calcoli, memorizzazioni, …) un ***programma*** che illustri l'intero procedimento, cioè una descrizione dell'algoritmo (1.1) fatta in un opportuno *linguaggio* "comprensibile" dal calcolatore.

Molti computer tascabili (o pocket computer) e tutti i calcolatori di maggiori dimensioni sono in grado di eseguire il seguente *programma (1.2)* scritto in linguaggio ***Basic***:

(**1.2**)

```
10 INPUT T        l'utente deve battere totale
20 K=100/T
30 INPUT D
40 PRINT D*K      l'utente deve battere dato
50 GOTO 30
```

È facile comprendere il significato di questo programma, che ha la forma di una sequenza di istruzioni numerate. PRINT in inglese significa "stampa"; GOTO deriva dall'inglese "go to", che significa "vai a". La parola "input", che abbiamo già usato, indica qualcosa che entra in una macchina (energia, informazioni, …); in questo caso INPUT viene usato per dire al calcolatore di attendere che l'utente batta un numero. Se non hai idea di come funzioni il programma puoi cliccare **qui**.

Per poter eseguire un programma come (1.2), il computer deve essere in grado di *memorizzare il testo del programma*, cioè, nel caso di (1.2), la seguente sequenza di caratteri, dove con "◊" e "↵" abbiamo indicato lo spazio bianco (pressione della barra spaziatrice) e l'"a capo", caratteri normalmente invisibili:

10◊INPUT◊T↵20◊K=100/T↵30◊INPUT◊D↵40◊PRINT◊D*K↵50◊GOTO◊30↵

Come le usuali CT memorizzano i numeri sotto forma di sequenze di bit, così un computer memorizza sotto forma di una sequenza di bit anche il testo del programma, utilizzando uno specifico codice.

Deve, inoltre, essere in grado di *leggere* (la sequenza di bit con cui ha codificato) *il programma e decidere, man mano, quale operazione eseguire*: una memorizzazione, un richiamo dalla memoria, un calcolo o una visualizzazione (operazioni che nelle CT non programmabili vengono comandate direttamente da tastiera), o un trasferimento dell'esecuzione a un altro punto del programma.

Per fare tutto ciò il computer deve avere:

- un "programma incorporato" per *codificare* il "programma battuto dall'utente",
- un dispositivo di memorizzazione in cui *registrare* il il programma codificato,
- un certo numero di *memorie-utente* da associare alle variabili (T, K, D, …) e
- un ulteriore "programma incorporato" per *tradurre* il programma codificato nell'azionamento dei vari dispositivi di calcolo, memorizzazione, … .

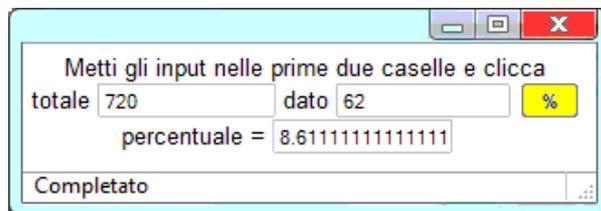
Esistono linguaggi di programmazione più sofisticati. Sotto a sinistra, si vede come il programma (1.2) può essere riscritto usando il ***QBasic***, che ha la caratteristica di essere molto semplice e di essere liberamente riproducibile. A destra è presentata una stesura del programma in un altro linguaggio, una versione di ***Pascal*** (il nome, *Pascal*, deriva da quello del famoso filosofo e scienziato francese - ⇨ vedi - che, nella prima metà del 1600, inventò una delle prime calcolatrici da tavolo, per fare addizioni e sottrazioni).

(1.3)

```
INPUT Tot
k = 100/Tot

Introduzione:
     INPUT dato
     PRINT dato*k
GOTO Introduzione
```

```
program Percentuali;
var tot, k, dato: real;
label 10;
begin
   readln(tot);
   k:=100/tot;
10: readln(dato);
    write(dato*k);
    goto 10
end.
```

Esistono, infine, linguaggi di programmazione incorporati in tutti i browser (in Mozilla, in Internet Explorer, …), in cui sono redatti i programmi che usiamo per cercare l'orario di un treno, prenotare un posto al cinema, …. Uno dei più usati tra questi linguaggi è **JavaScript** (in breve, JS). Il programma precedente assume la forma a cui puoi accedere **da qui** e che vedi visualizzata a lato. Questo è quanto vede l'utente, per calcolare 62/720·100.

Sotto è illustrato come è stato realizzato il programma, che potete visualizzare usando un opportuno comando del browser ("visualizza sorgente pagina", "html", … o altro, a seconda del browser che state impiegando).

(1.4)

```
<head>
<script language="javascript">
function Calc()
 {document.C.r.value = Number(document.C.d.value)*100/Number(document.C.t.value)}
</script>
</head>

<center>Metti gli input nelle prime due caselle e clicca<br>
<form name="C">
totale <input type="text" name="t" value="0" size=24>
dato <input type="text" name="d" value="0" size=24>
<input type="button" name="pulsante" value="%" onClick="Calc()"><br>
percentuale = <input type="text" name="r" value="0" size=24>
</form>
</center>
```

Potete provare ad usare il programma (e ad esplorarne la struttura). Più avanti vi sarà spiegato come usare questo semplice e comodo linguaggio di programmazione.

2. Ambienti di programmazione

Un *computer* è in grado di tradurre in operazioni-macchina un programma scritto in un qualunque linguaggio di programmazione, a patto che gli venga fornito in "input" anche un opportuno programma traduttore. La CPU di un computer può eseguire direttamente solo un programma che le arrivi sotto forma di una sequenza di bit che, a gruppi, rappresentino direttamente le operazioni-macchina da effettuare. Il linguaggio (che ha come alfabeto i simboli 0 e 1) in cui vengono scritti questi programmi viene detto ***linguaggio macchina***. I *linguaggi di programmazione **evoluti*** (come quelli usati sopra) non descrivono direttamente singole operazioni-macchina, ma, come abbiamo visto, • impartiscono comandi più sofisticati (a cui corrispondono più comandi del linguaggio-macchina), • usano come caratteri quasi tutti i simboli della tastiera e • indicano i comandi con nomi che ne richiamano il significato; per questo vengono detti ***linguaggi evoluti*** (o *di alto livello*). Per usarli il computer deve essere dotato di un ***ambiente di programmazione***, cioè un programma che contiene come sottoprogrammi:

- un ***programma redattore*** (***editor***) per registrare i caratteri battuti dall'utente; in genere è presente anche un ***help*** che richiama uso e significato dei comandi, propone esempi, … .

Un ***editor*** è una applicazione per leggere/elaborare testi (come NotePad/BloccoNote in Windows) che registra i documenti codificando i vari caratteri (lettere, cifre, virgole, spazi bianchi, e altri simboli) attraverso ***byte***, ossia sequenze di 8 bit (i caratteri codificabili in questo modo sono 256; infatti le diverse sequenze di 8 cifre che riesco a costruire con 0 e 1 sono 2·2·2·2·2·2·2·2 = 256). Il codice impiegato è chiamato **ASCII** (pronuncia: aski). Ad esempio "P" è codificato con 01010000, l'"a capo" con 00001101.

- un ***programma traduttore*** per tradurre il programma in linguaggio evoluto in una sequenza di bit che sia la versione in linguaggio macchina del programma.

Ecco come viene trasformata da un programma taduttore l'assegnazione (scritta in un linguaggio Basic) corrispondente alla formula a fianco:

$$w = \frac{2^3 \cdot - x}{9 - 1} + x \cdot 5$$

Ecco i passaggi con cui da tale grafo si può risalire alla scrittura nel linguaggio di programmazione, partendo dai nodi a sinistra in basso:

```
2^3 → 2^3*–x → (2^3*–x)/(9-1) → (2^3*–x)/(9-1)+x*5
```

[Se sei in ambiente Windows, cliccando **QUI**, puoi avviare il programma ***Compilazione*** (o il più semplice programma ***Albero***) che realizza e visualizza trasformazioni e ***grafi*** come nell'esempio precedente. Anche il programma Poligon premette di analizzare la struttura dei termini: se, definita una funzione F, batti "F(x):" ottieni la visualizzazione di come il programma ne imposta il calcolo, come nell'esempio a lato:

```
G(x)=(2^3*-x)/(9-1)+x*5
G(x):
v0 = 2 ^ 3
v1 = x -
v2 = v0 * v1
v3 = 9 - 1
v4 = v2 / v3
v5 = x * 5
v6 = v4 + v5
```
]

1 **(a)** Scrivi un'assegnazione che corrisponda alla seguente sequenza di assegnazioni elementari:
R2 = 1/3   R3 = R1^R2   R0 = R3+R1

(b) Scrivi le assegnazioni elementari e traccia il grafo corrispondenti all'assegnazione C = F + U*N.

In un ambiente di programmazione la *traduzione in linguaggio macchina* può essere avviata operando con il mouse o premendo una opportuna combinazione di tasti. La nuova versione viene memorizzata temporaneamente; quando l'esecuzione finisce essa viene persa. Questo è, per esempio, quanto accade con il *JavaScript*. In altri casi la traduzione in linguaggio macchina viene memorizzata (in un *file **eseguibile***) e può essere avviata successivamente anche fuori dall'ambiente di programmazione. Questo tipo di traduzione viene detta ***compilazione***. Ad es. in Windows tutti i file con estensione EXE sono dei programmi compilati.

Nello stendere un programma in un linguaggio evoluto dobbiamo tener presenti delle regole di scrittura che garantiscano che il testo battuto sia effettivamente traducibile in linguaggio macchina. L'insieme di queste regole di scrittura viene detto ***sintassi***.

Anche nella lingua naturale esistono delle regole sintattiche. Ad esempio uno dei modi in cui si può comporre una *frase* in italiano è: *articolo+nome+verbo* dove *articolo*, *nome* e *verbo* devono essere raccordati in numero (sing./plu.) e, eventualmente, in genere (m/f), e rispettare altre eventuali condizioni (es.: davanti ai nomi maschili singolari se iniziano con *z*, *x*, *gn*, *pn*, *ps*, *s* seguita da consonante o *i* seguita da vocale si può mettere *uno* non *un*; negli altri casi si può mettere *un*, non *uno*). Ma si tratta di regole che spesso presentano eccezioni e su cui spesso esistono opinioni contrastanti (ad es.qualcuno sostiene che davanti a *pn* - pneumatico, pneumotorace, … - occorre, o si può, usare *un*). In realtà non si tratta di "regole" ma di *modelli* che usiamo per orientarci nella produzione/interpretazione dei messaggi verbali.

Poi, anche se ci esprimiamo in modo un po' sgrammaticato, in genere ci capiamo allo stesso (di fronte al cartello «attendi - lo cane morzica» non abbiamo difficoltà a interpretarlo come «Attenti: il cane morsica»).

Nel caso dei linguaggi di programmazione le regole sintattiche sono invece definite senza ambiguità ed eccezioni (per questo si parla di ***linguaggi formali***) e devono essere rispettate rigorosamente. L'*help* indica le regole sintattiche da rispettare per costruire i programmi. Ad esempio le seguenti istruzioni dei programmi del 1° paragrafo:

k=100/Tot   document.C.r.value=Number(document.C.d.value)*100/Number(document.C.t.value)   k := 100/Tot

sono tutte ***assegnazioni***, che secondo i rispettivi help debbono avere nei primi due casi la forma `variable=expression` e nell'altro `variable := expression`.

In altri linguaggi le assegnazioni debbono avere forme diverse: `variable << expression` o `variable <- expression` o `set variable = expression` o `variable : expression` o …

3. Automatizziamo qualche procedimento di calcolo in JavaScript

Vediamo ora qualche semplice programma realizzato in *JavaScript*. Incominciamo da quello considerato alla fine di §1, di cui abbiamo già riportato un esempio d'uso e il testo. Ha la struttura di una pagina Web: è un documento in HTML (**h**yper**t**ext **m**arkup **l**anguage: linguaggio per contrassegnare ipertesti). Abbiamo visto come esso appare visualizzato da un **browser** (applicazione, come Mozilla, Internet Explorer, …, per interpretare i documenti Html) e ne abbiamo visto il documento "**sorgente**", cioè il testo (redatto con un qualunque **editor**) comprendente il contenuto verbale del documento e i **tag** (contrassegni), ossia i comandi racchiusi tra parentesi angolari (< e >) che contengono indicazioni sui formati in cui visualizzare il contenuto verbale, le eventuali immagini da inserire, i collegamenti ad altri documenti, …, e indicano le azioni da eseguire, descritte tra i comandi "**script**". I tag "**head**" ("intestazione"), <head> e </head>, delimitano la parte del sorgente in cui sono contenute informazioni o comandi riferiti all'intero documento. Seguono comandi indicano ciò che viene visualizzato; i tag "**center**" fanno sì che esso sia raffigurato "centrato"; invece <**br**> (break) comanda un "a capo".

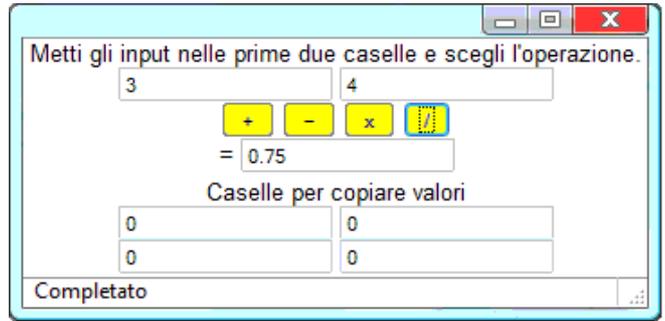
La parte del documento organizzata in caselle (*modulo*) è tra i tag "**form**"; essa forma un *oggetto* (ossia un *componente*) a cui, con la *proprietà* **name** viene dato nome "C". Le caselle sono dei sotto-oggetti del modulo specificati con i tag "**input**"; a ciascuna viene dato un nome (t, d, pulsante, r) ed altre proprietà: a tre, specificate come "**type**" *text*, viene assegnata "**size**" (dimensione) 24 (sono delle celle che possono accogliere 24 caratteri); sull'altra casella, specificata come "**type**" *button*, torniamo tra poco; "**value**" assegna un eventuale valore iniziale agli oggetti precedenti; nel caso del "bottone" si tratta del nome che apparirà su di esso.

Nel caso del sotto-oggetto di tipo "button" l'attributo "**onClick**" specifica che se si verifica l'*evento* "pulsante cliccato" viene avviata l'azione (o *metodo*) "Calc()" descritta dalla omonima **function** (così in Javascript vegono chiamati i *sottoprogrammi*). Il *programma* in senso stretto è racchiuso tra i comandi "**script**" (che in questo caso è descritto non nel corpo della pagina-web, ma nella intestazione) ed è costituito solamente dalla *function* Calc().

Il contenuto della function è delimitato da "**{**" e "**}**", e in questo è contenuto da una sola assegnazione. Essa legge i contenuti (ossia i valori: *value*) delle caselle di nome "d" e "t" del modulo di nome "C" e calcola il valore da mettere nella casella "r". Nelle assegnazioni è presente **document**: in questo modo viene indicata la pagina web attualmente visualizzata. In breve: *document.C.d.value* indica la proprietà "value" della proprietà (o sotto-oggetto) "d" della proprietà (o sotto-oggetto) "C" dell'oggetto "document".

Number serve per specificare che gli oggetti contenuti nelle caselle sono da intendere come "numeri", non come "testi": la somma di 3 e 4 viene intesa, altrimenti, come 34 invece che come 7.

Ricordiamo, infine, che nelle istruzioni di JS lettere diverse solo per la dimensione (come "a" e "A") sono considerate diverse. La spiegazione sembra complicata, ma, accompagnata da delle prove, risulterà facile. Facciamone alcune.

- Se provi a cliccare **qui** si avvia la calcolatrice, di cui a lato è illustrato un possibile funzionamento: metto 3 e 4 nelle caselle di input, scelgo la divisione e nella casella di output ottengo il risulato 0.75. Nelle quattro caselle in basso posso copiare e incollare input o output dalle caselle precedenti.

La struttura di questo documento, sotto riprodotto, è simile a quella del documento precedente:

- ci sono quattro bottoni che comandano quattro diversi sottoprogrammi ("function");
- in fondo sono aggiunte quattro caselle in cui si possono copiare i valori, ma che non sono richiamate da altri punti del programma.

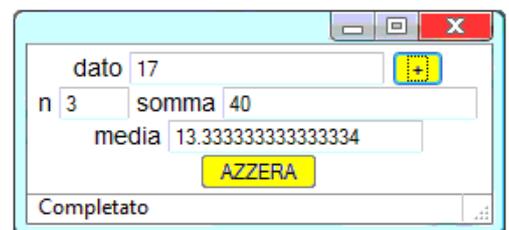
```
<head> <script language="javascript">
function Piu()
  {document.C.r.value = Number(document.C.a.value)+Number(document.C.b.value)}
function Men()
  {document.C.r.value = Number(document.C.a.value)-Number(document.C.b.value)}
function Per()
  {document.C.r.value = Number(document.C.a.value)*Number(document.C.b.value)}
function Div()
  {document.C.r.value = Number(document.C.a.value)/Number(document.C.b.value)}
</script> </head>
```

```
<center>Metti gli input nelle prime due caselle e scegli l'operazione.<br>
<form name="C">
<input type="text" name="a" value="0" size=24>
<input type="text" name="b" value="0" size=24><br>
<input type="button" name="pulsante" value="+" onClick="Piu()">
<input type="button" name="pulsante" value="-" onClick="Men()">
<input type="button" name="pulsante" value="x" onClick="Per()">
<input type="button" name="pulsante" value="/" onClick="Div()"><br>
= <input type="text" name="r" value="0" size=24><br><br>
Caselle per copiare valori<br>
<input type="text" name="x" value="0" size=24>
<input type="text" name="y" value="0" size=24><br>
<input type="text" name="z" value="0" size=24>
<input type="text" name="v" value="0" size=24>
</form> </center>
```

```
<head>
<script
language="javascript">
i=0;
while (i < 10) {i = i+1};
document.write(i)
</script> </head>
```

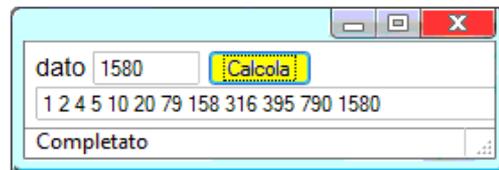
- A lato è riprodotto il contenuto di un altro file, a cui puoi accedere cliccando **qui**. Esso fornisce come uscita il numero **10**. È contenuto tutto nell'intestazione e l'uscita è comandata dal solo comando **document.write**: non ci sono caselle (*form*) in cui mettete input o output. Questo script contiene tre comandi: una assegnazione (i=0), un ciclo **while** (su cui ora ci soffermiano) e il comando di scrittura descritto sopra. I comandi sono separati da un "**;**" (punto e virgola).

while (*condizione*) {*assegnazioni*} esegue le *assegnazioni* fin tanto che la *condizione* risulta essere vera. In questo caso **i** viene incrementato di 1 fino a che raggiunge il valore 10.

- Cliccando **qui** viene avviato un programma per calcolare la somma e la media di una quantità qualunque di dati: l'utente batte un dato, clicca "+" e, automaticamente, vengono aggiornati i valori del "contatore", della "somma" e della "media". Il bottone "azzera" annulla i valori introdotti: se lo si clicca viene avviato il sottoprogramma Via() che azzera o cancella i valori assegnati alle diverse variabili.

Si noti che la media, nel caso esemplificato, viene visualizzata come 13.3…34 invece che come 13.3…33: i calcoli vengono effettuati in base 2 e, come vedrai meglio più avanti, l'*ultima* cifra, nel caso di un risultato approssimato, può differire dal valore corretto.

```
<head> <script language="javascript">
i=0; sum=0;
function Via() {i=0; sum=0; document.M.dato.value=""; document.M.media.value="";
                 document.M.n.value=0; document.M.s.value=0};
function Calc() {i=i+1; sum=sum+Number(document.M.dato.value);
                 document.M.s.value=sum; document.M.n.value=i;
                 document.M.media.value=sum/i}
</script> </head>
<center> <form name="M">
dato <input type="text" name="dato" value="" size=24>
<input type="button" name="altro" value="+" onClick="Calc()"><br>
n <input type="text" name="n" value="0" size=3>
somma <input type="text" name="s" value="0" size=24><br>
media <input type="text" name="media" value="" size=24><br>
<input type="button" name="via" value="AZZERA" onClick="Via()">
</form> </center>
```

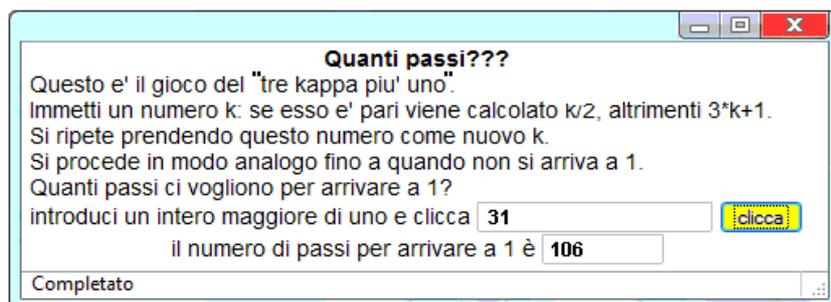
4. Ancora due esempi in JS

• Il programma Poligon (che se sei in ambiente Windows puoi attivare da **qui**) consente di trovare i numeri primi (maggiori di 1) per cui è esattamente divisibile un numero intero positivo: se batto FATT(1580) ottengo 2*2*5*79. Il programmino in JS a cui accedi da **qui** consente di trovare tutti i numeri interi positivi per cui è divisibile un dato numero intero positivo. A destra ne è illustrato un esempio d'uso.

```
<head>
<script language="javascript">
function divisor(){ d=2; n=document.cal.n.value; document.cal.v.value=1;
  while (d <= n)
    {q=n%d; if (q==0) {document.cal.v.value=document.cal.v.value+" "+d}; d=d+1}
} </script> </head>
<form name="cal">
dato <input type="text" name="n" value="" size=7>
<input type="button" name="" value="Calcola" onClick="divisor()"><br>
<input type="text" name="v" value="" size=100>
</form>
```

Qualche commento:
- In JS M%N indica il resto intero della divisione di M per N: vale 0 se N è un divisiore di M.
- *if* (*condizione*) {*assegnazioni*} esegue le *assegnazioni* quando la *condizione* è vera.
- In una *condizione* possono essere usati simboli di operazione formati da due caratteri. In particolare si usano "==" invece di "=", "!=" invece di "≠", oltre a "<=" e ">=" (si possono poi usare i simboli logici "&&" invece di "and", "||" invece di "or", "!" invece di "not").

2 Prova a modificare lo script precedente in modo che dimezzi, circa, i confronti da eseguire, tenendo conto che un numero naturale non è divisibile per numeri maggiori della sua metà e minori di esso.

3 Esamina la nuova versione del programma precedente a cui puoi accedere da **qui** e spiega il funzionamento dei Tag "**textarea**" in essa presenti.

• Nei casi precedenti i passi da eseguire crescono al crescere dell'input. Vi sono situazioni in cui ciò non accade. Provate ad eseguire lo script illustrato a lato, relativo al "*gioco del 3k+1*" a cui potete accedere da **qui** per rendervene conto. Il gioco è spiegato nello script stesso. Esso termina quando si arriva ad 1.

Si arriva sempre ad 1 o ci sono numeri a partire dai quali il gioco non termina? Provate!

4 Vi sono input minori di 31 che danno un output maggiore di 106?

Se volete approfondire le conoscenze su JavaScript, cliccate **qui**

5. Esercizi

```
F(x):
v0 = x + 1
v1 = 2 ^ v0
v2 = v1 + 1
v3 = x - 1
v4 = v2 / v3
v5 = v4 + 1
```

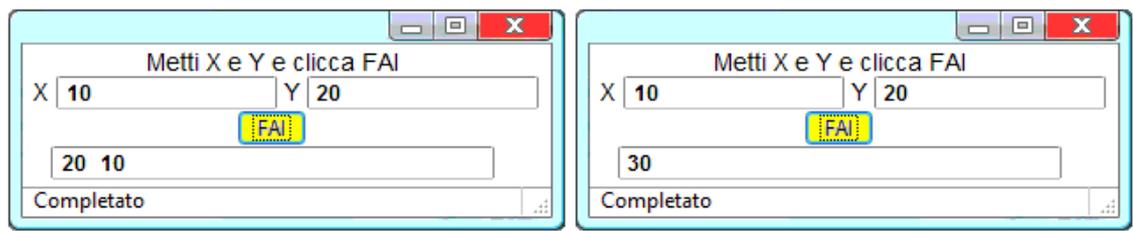
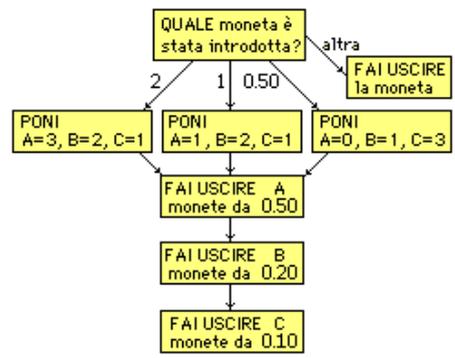
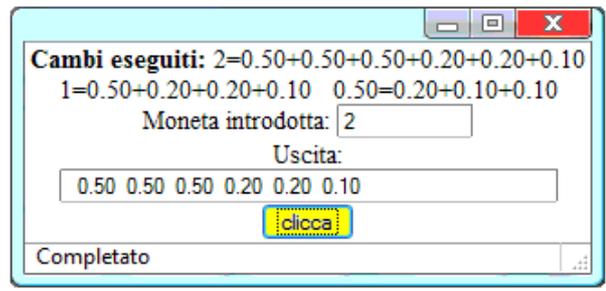
e1 Abbiamo descritto una funzione F e abbiamo ottenuto (ad es. con Poligon) una sua descrizione come quella a lato, in cui v5 indica il valore di F(x). Cerca di descrivere F(x) sia con un grafo ad albero, sia con un unico termine in cui compare la sola variabile x, sia nella usuale scrittura a più piani, sia nella scrittura ad un piano (quella che useresti in un programma).

e2 Abbiamo descritto una funzione G nel modo a lato: `G(x) = (2^(x+1)-1)/(x+1)-1.` Cerca di descrivere G(x) sia mediante una sequenza di assegnazioni elementari, come nel testo del quesito precedente, sia nella usuale scrittura a più piani, sia con una grafo ad albero.

e3 Abbiamo descritto una funzione H nel modo indicato a lato. Cerca di descrivere H(x) sia con un grafo ad albero, sia nella scrittura ad un piano (quella useresti in un programma)

$$H(x) = 3 + \frac{2 + 3x}{7} - \frac{5}{-2x}$$

e4 Scrivi il termine rappresentato dal grafo ad albero seguente sia in una scrittura "a più piani" che in una scrittura "ad 1 piano" (qui RAD indica la radice quadrata).

e5 Sotto sono riprodotti esiti di due programmi JS, **nome1** e **nome2**, che vorrebbero produrre la scrittura di Cognome Nome se l'utente mette in X il Nome e in Y il Cognome. Uno dei due funziona e l'altro no. Esamina i due codici-sorgente e spiega il perché di questo comportamento.

e6 Sotto a sinsitra è riprodotto un esito di un programma in JavaScript che realizza il "cambio monete" descritto dal diagramma di flusso a destra.

Nei link seguenti puoi esaminare tre versioni, **cambio1**, **cambio2** e **cambio3**, dello script. Una che usa i comandi **if** e **for**, una che usa **switch-case** e **while**, ed una che usa un'altra versione di **if**. Esamina i programmi e cerca di spiegare, in modo comprensibile, il funzionamento di queste istruzioni.

Nota. In **cambio1** la parte che segue </head> è racchiusa tra <body> e </body>. Sono comandi, non essenziali, che identificano la parte del file che viene visualizzata. In questo caso sono stati inseriti per specificare il font che devono impiegare i caratteri visualizzati (se esamini **cambio1** vedi che dopo </head> c'è <body style="font-family:Times New Roman; font-size:100%"> che specifica che fino a </body> il font è Times New Roman e che le sue dimensioni sono al 100%; se cambi font dal menu del browser, esse vengono cambiate in **cambio2** e **cambio3**, non in **cambio1**).

e7 Il file riprodotto a sinistra (accessibile da [qui]) realizza la tabulazione di $x \to \sqrt{x}+x^3+1$, riprodotta parzialmente a destra. È un file senza intestazione ("head"). Sono utilizzate delle funzioni (round, arrotondamento agli interi; sqrt, radice quadrata; pow, elevamento a potenza) diverse dalle usuali operazioni artimetiche, per impiegare le quali occorre usare una "**libreria**", ossia una parte secondaria del linguaggio JavaScript, che è caricabile usando **with(Math) {…}**. Il sottoprogramma Arr(h,n) {…} mette in **a** all'arrotondamento di **h** alla **n**-esima cifra dopo il punto decimale (serve per avere degli arrotondamenti corretti, in quanto l'ultima cifra potrebbe differire da quella corretta). L'elenco dettagliato delle **funzioni** di JS lo trovi [qui]. Il significato dei simboli Html − > √ <sup> lo puoi capire da solo. <PRE> e </PRE> delimitano una parte di testo "preformattato", cioè scritto in un font "monospazio" (tutti i caratteri, sia "i" che "w", occupano lo stesso spazio, gli spazi bianchi vengono tutti considerati, gli "a capo" vengono realizzati anche senza un <br>). **\t** e **\n** indicano una "tabulazione" (cioè il posizionamento dei caratteri su successive colonne a distanza prefissata l'una dall'altra) e un "a capo".

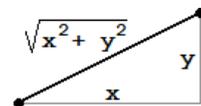
Modificando solo `for (x=1; x<=3; x=x+1/10)` e `y = sqrt(x)+pow(x,3)+1` puoi tabulare altre funzioni in altri intervalli.

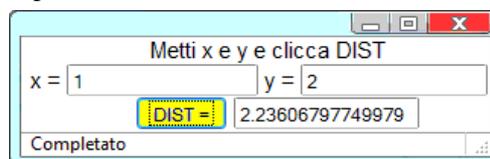
- Modifica il file e salvalo in modo da tabulare la funzione attuale nell'intervallo [0, 5] ogni 0.5, ossia in 0, 0.5, 1, ….
- Modificalo, poi, per studiare $x \to \sqrt{(x^4+1)}+x$ in [-5, 5] ogni 0.5.

```
<pre>
tabulazione di x &minus;&gt; &radic;x+x<sup>3</sup>+1
<script language="javascript">
with(Math) {
function Ar(h,n) {a=round(h*pow(10,n))/pow(10,n)}
for (x=1; x<=3; x=x+1/10)
  {Ar(x,7); x=a; y = sqrt(x)+pow(x,3)+1; Ar(y,7); y=a;
   document.write(x+'\t&minus;&gt;\t'+y+'\n')}}
</script>
</pre>
```

```
tabulazione di x -> √x+x³+1
 1      ->  3
 1.1    ->  3.3798088
 1.2    ->  3.8234451
 1.3    ->  4.3371754
   ...
 2.7    ->  22.3261677
 2.8    ->  24.6253201
 2.9    ->  27.0919386
 3      ->  29.7320508
```

In **Poligon** ci sono vari modi per realizzare la tabulazione di una funzione. Ma in questo caso è semplice battere F(x) = sqr(x)+x^3+1 e poi via via F(1), F(1.1), F(1.2), …. Prova a farlo.

e8 A lato è illustrato come si può trovare la lunghezza dell'ipotenusa si un triangolo rettangolo note le lunghezze dei cateti (*teorema di Pitagora*). In questo modo possiamo determinare la distanza di un punto (x,y) dall'origine (0,0). Sotto a sinistra questo calcolo è realizzato con *Poligon*; in maniera simile potrebbe essere realizzato

con molti altri progammi: si definisce una funzione D che esprime la distanza di unpunto dall'origine e poi, ad es. per determinare la distanza di (1,2) di batte D(1,2) e se ne ottiene il valore, eventualmente espresso anche in forma "abbreviata" (in questo caso $\sqrt{5}$). Se non disponessi di un tale programma potresti realizzare un programmino in JS che si comporti nel modo esemplificato sotto a destra. Fallo.

D(x,y) = SQR(x^2+y^2)
D(1,1) **= 1.414213562373095 = R2(2)**
D(1,2) **= 2.23606797749979 = R2(5)**
D(SQR(2),SQR(2)) **= 2**
D(-2,-2) **= 2.82842712474619 = 2R2(2)**

e9 [Qui] trovi il file contenente il programma (1.3) per il **QBasic**. Se sei in Windows, prova ad aprire il [QBasic] (se non lo hai già salvato in qualche cartella, in cui puoi salvare anche l'[help] - per informazioni sul linguaggio [vedi]), da esso ad aprire il progamma precedente (dopo averlo prima salvato, eventualmente nella stessa cartella del QBasic), e ad eseguirlo. Per terminare l'esecuzione premi Ctrl+C.

1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini: *programma traduttore* (§2), *sintassi* (§2), *tag* (§3), *form* (§3).

2) Su un foglio da "quadernone", nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").

Algebra elementare
Calcolo simbolico, termini ed equazioni equivalenti

0. Introduzione

In più occasioni abbiamo fatto uso di formule per rappresentare relazioni tra grandezze di vario genere e le abbiamo manipolate. In questa scheda cercheremo di generalizzare i procedimenti impiegati.

1. Il simbolo "="

Il simbolo "=" e le equazioni vengono usate in molti contesti. Gli attribuiamo sempre lo stesso significato? Consideriamo alcuni esempi.

Esempio (**A**). Usiamo l'espressione 3+2=5 per indicare che "3 più 2 fa 5". Per indicare che "5 è scomponibile negli addendi 3 e 2" usiamo invece di preferenza l'espressione 5=3+2. In realtà le due *equazioni* affermano entrambe che i termini 3+2 e 5 hanno lo stesso valore. Tuttavia, nell'uso comune, "=" viene spesso interpretato come "*può essere sostituito con*":

3+2=5 viene inteso come: 3+2 può essere sostituito con 5,

5=3+2 viene inteso come: 5 può essere sostituito con 3+2.

Esempio (**B**). Per calcolare 3+2 con una CT battiamo: 3 + 2 =. Qui "=" rappresenta il comando (per la CT) di eseguire il calcolo impostato e visualizzarne il risultato.

1 (**1**) Indica la sequenza di tasti da premere per calcolare (3+2)·4 con una CT senza priorità.
(**2**) Tizio per descrivere le operazioni che man mano esegue nel calcolo "a mano" di tale termine scrive: 3 + 2 = 5 · 4 = 20. Spiega perché ha sbagliato e indica uno o più modi in cui avrebbe potuto descrivere correttamente il procedimento di calcolo.

2 Di fronte al compito "trova il valore di 3·5+4/2–5" Maria e Veronica procedono rispettivamente così:
• 3·5+4/2–5 = 15+2–5 = 10+2 = 12 • 3·5+4/2–5 = 10+2 = 15+2–5 = 12
L'insegnante considera sbagliata la risposta di Veronica. Secondo voi ha ragione? Perché?

Esempio (**C**). Abbiamo incontrato l'uso di "=" con un ulteriore significato. Ad es. se, riferendoci a una CT, indichiamo con *V* il numero contenuto nel visore e con *M* quello contenuto nella memoria-utente, possiamo indicare l'azione che esegue la CT quando si preme M+ con: *M* = *M* + *V*. Con questa scrittura intendiamo dire che la CT modifica il valore in memoria prendendo come nuovo valore il vecchio aumentato di *V*. Anche nella descrizione di altri procedimenti di calcolo abbiamo usato scritture simili. Ad esempio se con C indichiamo un "contatore" con la scrittura "PONI C=C+1" abbiamo inteso "incrementa C di 1". In questi casi invece di "=" si può usare "**:**=". Nei nostri esempi scriveremmo rispettivamente: *M* := *M*+*V* e C := C+1. Lo stesso uso di "=" viene fatto nelle *assegnazioni* dei linguaggi di programmazione.

3 Descrivi (usando ":=") l'azione comandata alla CT dal tasto M e quella comandata dal tasto MR.

Esempio (**D**). Quando *definiamo*: x^2 = x·x o definiamo: f(x) = 3x+1, usiamo "= …" per dire "*nel seguito sta per il termine* …"; cioè x^2 [f(x)] è una abbreviazione del termine x·x [del termine 3x+1]. Non ci dobbiamo porre il problema se il termine a sinistra equivale al termine a destra: essi sono equivalenti "per definizione".

Esempio (**E**). Quando diciamo che la *proprietà* commutativa dell'addizione afferma che a+b=b+a intendiamo che i termini a+b e b+a sono equivalenti, cioè che *per ogni* coppia di numeri a e b il calcolo di a+b e quello di b+a danno luogo allo stesso valore, o, più in breve, che l'equazione a+b=b+a è vera.

Esempio (**F**). Nella scheda 4 di Le Statistiche abbiamo usato l'espressione x+35=126 per rappresentare matematicamente la relazione tra alcuni dati, uno dei quali (gli studenti passati dalla 1ª alla 2ª), indicato con x, ci era sconosciuto. Cioè abbiamo usato "=" non per la descrizione di una proprietà matematica o per una definizione, ma per descrivere un *modello matematico* di una particolare situazione. Svolgendo i calcoli abbiamo trovato che l'equazione x+35=126 è vera se x è 91.

In (A), (E) e (F) il simbolo "=" corrisponde al concetto di *eguaglianza*: si afferma che 3+2 è eguale a 5, … , che x+35 è eguale a 126. È equivalente affermare che 5 è uguale a 3+2, …, che 126 è uguale a x+35.

Nei casi (B) e (C), invece, "=" indica delle *azioni*: esegui il calcolo impostato, calcola e metti nell'"oggetto" indicato a sinistra il valore indicato a destra. Anche se nel caso (C) siamo di fronte a scritture simili a equazioni, scambiando le espressioni ai lati di "=" non si ottiene un'indicazione equivalente (quesito 3: *M*=*V* non equivale *V*=*M*).

Il caso (D) assomiglia al caso (C) (siamo di fronte alla descrizione di un comando: «sia: f(x)=3x+1») ma anche a (E): si può dire che x^2=x·x, x·x=x^2, f(x)=3x+1, … sono equazioni che, qualunque valore si assegni a x, sono vere *per definizione*.

La verità di 5=2+3 è invece frutto di una *dimostrazione* (calcolando trovo che effettivamente 3+2 fa 5).

In casi come (F) si intende che l'equazione deve essere vera *quando* le variabili considerate (la variabile x, in questo caso) abbiano il significato descritto (x sia il numero degli studenti …). Per fare un altro esempio, *A*=*a*·*b* è vera se con *A* si intende l'area (in m^2) di un rettangolo con lati consecutivi di misure *a* e *b* (in m), non è vera per ogni scelta di numeri da sostituire a *a*, *b* e *A*.

Accanto a equazioni sempre vere o vere solo per particolari valori assegnati alle variabili che vi compaiono, vi sono equazioni sempre false: 1+1=3, x=x+1 (qualunque numero si metta al posto di x il valore di x+1 è diverso dal numero x), …

4 Tra le seguenti equazioni, quali sono sempre vere, quali lo sono per qualche (ma non ogni) scelta di valori da assegnare alle variabili, quali sono sempre false? Motiva le risposte.

a+b = a b $x^2 = 4$ x+y = 0 $u^2 + w^2 = -8$ $\sqrt{x} + x = -100$ 2 x – x = x

Nota. Nell'equazione a+b = a b non è stato evidenziato il simbolo di moltiplicazione tra le variabili del termine destro ma al suo posto si è lasciato un piccolo spazio bianco.

Nell'usuale linguaggio matematico spesso si usa questa convenzione. Occorre però farlo in casi in cui sia chiaro che scrivendo, ad es., *np* si intende che *n* e *p* rappresentano variabili distinte, non lettere che compongono la variabile di nome "*np*". Non ci sono sicuramente ambiguità nei contesti in cui si usano solo variabili composte da una sola lettera (eventualmente seguita da un indice). Negli altri casi può convenire esplicitare il simbolo della moltiplicazione o racchiudere le variabili tra parentesi; le parentesi devono essere necessariamente usate se come variabili si usano espressioni che contengono spazi bianchi. Ecco, ad esempio, alcuni modi per indicare la formula che lega il costo totale al costo unitario:

costo = (numero dei pezzi)·(costo unitario)   *c = np cu*   *c = np·cu*
Costo = NumeroPezzi·CostoUnitario   *c = (np)(cu)*

In genere quando si scrivono *a* e *A* si intendono due variabili differenti, come in *A* = *a*·*b*, ma in molti linguaggi di programmazione (Basic, Pascal, Fortran, …) e in altre applicazioni due nomi di variabile che differiscano solo per la dimensione (maiuscolo/minuscolo) di qualche carattere vengono considerati equivalenti. In JavaScript, invece, caratteri diversi per dimensione sono differenti.

Ricordiamo, inoltre, che nei linguaggi di programmazione (e in alcune applicazioni) bisogna sempre esplicitare il simbolo di moltiplicazione (*). In altre ciò non è necessario (in Poligon, ad esempio, "x·x" può essere scritto sia "x*x" che "xx", senza spazi bianchi; questo programma ammette infatti solo le variabili numeriche di una sola lettera "x", per cui non possono sorgere ambiguità; per Derive esamina il sottomenu *Stato Algebra* di *Dichiara*).

Una relazione tra numeri o altre grandezze espressa mediante un'equazione spesso può essere rappresentata efficacemente anche utilizzando *altri "linguaggi"*.

5 Completa i riquadri seguenti:

2. Calcolo simbolico - Termini equivalenti

L'equazione 3+2 = 5 può essere usata per passare da 3+2+x al termine equivalente 5+x dicendo che ho fatto la sostituzione 3+2 = 5, cioè che al posto di 3+2 ho messo 5.

Analogamente posso dire che, usando una sostituzione del tipo a+b = b+a, posso passare dal termine 5+x al termine equivalente x+5, o che, posto f(x) = 10+x·7, al posto di 10+2·7, 10+3·7, 10+4·7, … posso scrivere f(2), f(3), f(4), …

Cioè le equazioni sempre *vere* (che siano tali per definizione o perché lo si è dimostrato) possono essere usate per effettuare delle trasformazioni di termini in termini equivalenti.

La manipolazione di un termine o di un'equazione per *riscriverla* in una forma equivalente (ad esempio la riscrittura di un termine per poi poterlo calcolare più facilmente con una CT o a mente, la riscrittura di un'equazione che si vuole risolvere rispetto a una certa variabile, …) viene chiamata ***calcolo simbolico*** per distinguerla dal *calcolo numerico*, con cui si ottiene un nuovo valore numerico a partire da altri valori numerici: $3·2 \to 6$ è un calcolo numerico, $3·2 \to 2·3$ e $x·a·x \to a·x^2$ sono calcoli simbolici.

A volte invece che di calcoli simbolici si parla di *calcoli letterali* (con riferimento al fatto che oltre che su numeri si opera anche su espressioni che contengono lettere e nomi) o di *calcoli algebrici*. Quest'ultima dizione deriva dalla parola ***algebra***, con cui si intende quella parte della matematica che si occupa dello studio delle proprietà delle operazioni e delle formule (equazioni, disequazioni, …), oltre che di altri argomenti, a cui accenneremo successivamente.

Man mano, nel corso dello studio della matematica, incontreremo svariate tecniche di calcolo simbolico. Abbiamo già incontrato e usato, più o meno esplicitamente, varie tecniche.

In Le Statistiche - 4 abbiamo visto ad es. come usare la proprietà del riordino della somma per trasformare 17+16+4+3 in 17+3+(16+4). Come sai vale anche la proprietà del ***riordino del prodotto***:

il risultato di una moltiplicazione non viene modificato dalla commutazione dei suoi due termini (vedi *figura 1-A*: per contare i quadretti posso sia fare 4 volte 6 che fare 6 volte 4)

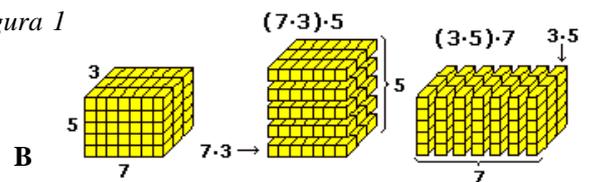
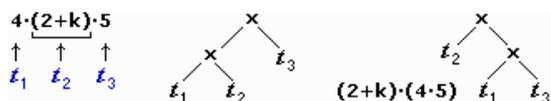
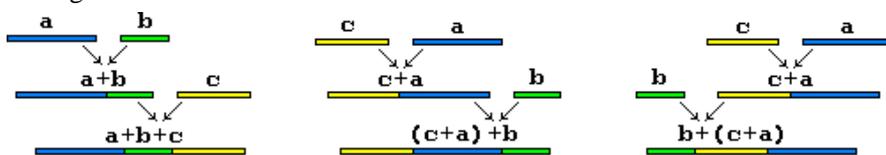
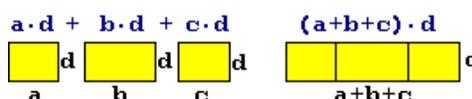
e, più in generale (vedi *figura 1-B*: per contare i cubetti posso sia sommare 5 strati di 7·3 cubetti che sommare 7 strati di 3·5 cubetti):

*due termini ottenuti entrambi applicando ripetutamente la **moltiplicazione** a partire dagli stessi sottotermini* t1, t2, …, tn *sono **termini equivalenti***.

figura 1

A lato è illustrata la struttura di due termini equivalenti ottenibili l'uno dall'altra con un riordino del prodotto.

6 Calcola mentalmente 2·6·50·3·3 nel modo che ritieni più conveniente e scrivi il termine che corrisponde al procedimento che hai impiegato. ....

7 Per calcolare 17+29+13·118 con una CT "senza priorità" conviene considerare il termine equivalente 13·118+17+29. Perché? È la proprietà del riordino della somma o quella del prodotto a garantire questa equivalenza?

8 Per la divisione vale la proprietà del riordino? (se la risposta è affermativa spiega il perché, se è negativa mostra un controesempio)

Delle proprietà del riordino abbiamo dato solo delle spiegazioni intuitive: è difficile andare oltre. Ad es. ci possiamo convincere dell'equivalenza di $a+b+c$ con $c+a+b$ o con $b+(c+a)$ (casi particolari del riordino della somma) con qualche *calcolo a mano su alcuni esempi numerici*. La *dimostrazione* che ciò valga *in generale* è molto complicata. Possiamo convincerci che l'equivalenza vale in generale interpretando "*fisicamente*" la addizione: se cambio l'ordine con cui congiungo tre aste non cambia la lunghezza dell'oggetto che ottengo.

Analogamente, interpretando la moltiplicazione come modello matematico per il calcolo dell' estensione di una superficie rettangolare, possiamo convincerci del fatto che $a·d+b·d+c·d$ equivale a $(a+b+c)·d$.

Ad essere rigorosi, ricorrere a queste spiegazioni "fisiche" è un po' un cane che si morde la coda: le operazioni aritmetiche sono state inventate per affrontare più facilmente problemi relativi a grandezze fisiche, economiche, …; non possiamo capovolgere la situazione e dedurre certe proprietà delle operazioni aritmetiche dal fatto che, operando concretamente con grandezze fisiche, con valori monetari, … si verificano certi fatti.
È un "circolo vizioso" anche verificare alcune proprietà di base (la possibilità di riordinare un'addizione, di raccogliere a fattor comune, …) facendo un po' di calcoli (a mano o con la CT) su alcuni esempi numerici. Infatti nell'esecuzione dei calcoli, spesso senza che ce ne accorgiamo, vengono già usate queste proprietà.

Ad esempio consideriamo l'esecuzione a mano di 24·32: troviamo 48 facendo 24·2, troviamo 720 mettendo uno zero finale e facendo 24·3, sommiamo 48 e 720. Nel far ciò abbiamo trasformato 24·32 in 24·2+24·3·10:

```
           24 x
           32 =
          -----
24·2  ->   48 +
24·30 ->  720 =
          -----
          768
```

24·32 → 24·(2+30) → 24·2+24·30 → 24·2+24·(3·10) → 24·2+24·3·10

Comunque, poichè non possiamo porci l'obiettivo di dimostrare tutto (a scuola non si può riinventare in pochi anni tutta la matematica che è stata messa a punto in millenni, né la scuola preuniversitaria ha l'obiettivo di formare dei "piccoli matematici"!), *confidando sul fatto che le operazioni aritmetiche e gli algoritmi di calcolo usuali siano stati definiti bene, a volte ricorreremo ad esemplificazioni di tipo fisico o a esperimenti numerici per giustificare alcune proprietà*.

Nel quesito 7 hai visto che per calcolare 17+29+13·118 con una CT senza priorità conviene considerare 13·118+17+29. Per precisare in che modo abbiamo riordinato la somma possiamo dire che abbiamo applicato la ***regola di riscrittura*** $\boldsymbol{a+b+c \rightarrow c+a+b}$.

La direzione della freccia indica il verso in cui viene effettuata la *sostituzione*.

9 Se per calcolare 50·13·2 ci riconduciamo, riordinando, al calcolo: 50·2·13 = 100·13 = 1300, quale regola di riscrittura abbiamo impiegato? $\boldsymbol{a·b·c \rightarrow}$ ....

Considera il calcolo a lato.
(questa espressione non indica solo delle uguaglianze ma anche il verso in cui sono eseguiti i calcoli, come se ci fosse "→" al posto di "=")

$$\frac{17+16+3}{2} = \frac{17+3+16}{2} = \frac{20+16}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

Prima di fare dei calcoli numerici ho riordinato il primo termine della divisione, cioè ho *rimpiazzato* il ***sottotermine*** 17+16+3 con il sottotermine equivalente 17+3+16. Invece di dire che ho applicato la seguente regola di riscrittura (1) all'intero termine possiamo dire che ho applicato la regola di riscrittura (2) al primo termine della divisione:

(1) $\dfrac{a+b+c}{d} \longrightarrow \dfrac{a+c+b}{d}$ (2) $a+b+c \longrightarrow a+c+b$

10 Nel seguente calcolo sono usate due volte le regole $\dfrac{a}{b} \rightarrow a\cdot\dfrac{1}{b}$ e $a\cdot\dfrac{1}{b} \rightarrow \dfrac{a}{b}$

[l'equivalenza tra **a/b** e **a·(1/b)** è stata discussa nella scheda 2 di *La automazione*]

$$\frac{14}{3}\cdot 5\cdot\frac{6}{7}\cdot 2 = 14\cdot\frac{1}{3}\cdot 5\cdot 6\cdot\frac{1}{7}\cdot 2 = 14\cdot\frac{1}{7}\cdot(6\cdot\frac{1}{3})\cdot(5\cdot 2) = \frac{14}{7}\cdot\frac{6}{3}\cdot 10 = 2\cdot 2\cdot 10$$

Qual è il sottotermine $\dfrac{a}{b}$ nei due casi in cui si è applicata la prima regola?

....

Qual è il sottotermine $a\cdot\dfrac{1}{b}$ nei due casi in cui si è applicata l'altra regola?

....

Nota. Stiamo usando la parola "***regola***" non nel senso di "modo di comportarsi a cui occorre attenersi", cioè di norma, precetto, ... obbligatorio (o consigliato), ma nel senso, un po' diverso, di descrizione sintetica di un procedimento meccanico. Cioè non tanto come in «è contro le *regole* del calcio prendere la palla con le mani» quanto come in «nella maggior parte dei casi per formare il plurale dei nomi che finiscono in "e" puoi usare questa *regola*: …».

Abbiamo già usato (*Le statistiche*, scheda 1, quesito e23) la ***proprietà distributiva*** *della moltiplicazione rispetto alla addizione* (illustrata anche nella figura precedente): $a(b+c) = ab+ac$ e, più in generale, $a(b+c+\ldots) = ab+ac+\ldots$ e $(b+c+\ldots)a = ba+ca+\ldots$. Possiamo quindi applicare le regole di riscrittura:

$$a\cdot(b+c+\ldots) \longrightarrow a\cdot b+a\cdot c+\ldots \qquad (b+c+\ldots)\cdot a \longrightarrow b\cdot a+c\cdot a+\ldots$$

per ***distribuire*** il *fattore moltiplicativo* ***a*** tra i termini di una sequenza di *addizioni*, cioè per ***portarlo dentro*** al sottotermine (***b***+***c***+…).

Ad es. per calcolare a mente 4·157 si può rimpiazzare 157 con 150+7 e poi distribuire "4·":

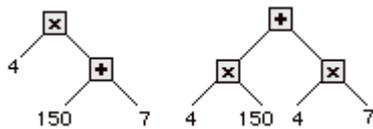



figura 2

4·157 = 4·(150+7) = 4·150 + 4·7 = 600+28 = 628

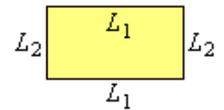
Nel passaggio da 4·(150+7) a 4·150+4·7 la struttura del termine è cambiata nel modo raffigurato a fianco: l'*operazione "principale"* non è più la moltiplicazione, ma la addizione, cioè il termine si presenta come una somma di termini invece che come un prodotto di termini.

Le equazioni che descrivono la proprietà distributiva lette "alla rovescia" danno luogo alle regole di riscrittura:

$$a\cdot b+a\cdot c+\ldots \longrightarrow a\cdot(b+c+\ldots) \qquad b\cdot a+c\cdot a+\ldots \longrightarrow (b+c+\ldots)\cdot a$$

che permettono di ***raccogliere*** *a fattor comune* o ***portare fuori*** dal termine ***a***·***b***+***a***·***c***+… o dal termine ***b***·***a***+***c***·***a***+… il fattore moltiplicativo ***a***.

Ad esempio se L_1 e L_2 sono le misure di due lati consecutivi di un rettangolo, per esprimere il perimetro P possiamo scrivere:

$$P = L_1+L_2+L_1+L_2 = L_1+L_1+(L_2+L_2) = 2\cdot L_1+2\cdot L_2 = 2(L_1+L_2)$$

dove abbiamo riordinato l'addizione, abbiamo operato due riscritture del tipo ***a***+***a*** → 2***a*** ($L_1+L_1 \rightarrow 2L_1$, $L_2+L_2 \rightarrow 2L_2$) e, infine, abbiamo raccolto 2 a fattor comune.

11 Qual è l'operazione principale del termine $2\cdot L_1+2\cdot L_2$?
E quella di $2(L_1+L_2)$?
Rappresenta a lato con due grafi tali termini.

Le manipolazioni simboliche di un termine in alcuni casi cambiano solo il posto di alcuni sottotermini (es.: x·y → y·x), negli altri cambiano la struttura, spesso cambiando anche l'operazione principale. Ad es. distribuendo un fattore moltiplicativo si trasforma un prodotto in una somma, raccogliendolo si trasforma una somma in un prodotto (fig. 2). Queste trasformazioni servono per semplificare i successivi calcoli numerici o per risolvere equazioni o per scrivere in modo più comodo da usare delle formule o ... .

Nel paragrafo *Esercizi* troverai vari esempi di utilizzo.

12 Sotto, nella prima colonna, sono elencate alcune regole di riscrittura. Nella seconda colonna è indicato un termine con evidenziato in corsivo un sottotermine. Nella terza colonna scrivi come si trasforma il termine dopo la applicazione della regola al sottotermine evidenziato. Nella quarta indica quale descrizione verbale fra quelle elencate si addice meglio alla regola.

$a - b \rightarrow a + -b$	*95 – 7* + 15 – 3		
$\frac{a}{b} \rightarrow a \cdot \frac{1}{b}$	$\frac{17}{0.25} \cdot 16$		
$a(-b) \rightarrow -(a\,b)$	*3 · (– 5 · 7)* + 8		
$a + -b \rightarrow a - b$	$(x + -\frac{y}{z}) \cdot 3$		
$b(a + c) \rightarrow b\,a + b\,c$	1 – *3 · (1 + 2)* – 5		

(1) trasformare un prodotto in somma

(2) trasformare una divisione in prodotto

(3) trasformare una differenza in somma

(4) trasformare una somma in differenza

(5) portar fuori la negazione da un prodotto

13 Riportiamo alcuni errori di calcolo simbolico (trasformazione di termini in termini) fatti da alunni di scuola secondaria superiore; in alcuni casi, per chiarezza o brevità, descriviamo con una regola di riscrittura il procedimento che intendevano applicare.

(A) x+yz = y+xz applicando a x+y la regola di riscrittura **a+b → b+a**.

- Dimostra con un esempio che i due termini non sono equivalenti e spiega qual è l'errore.

(B) 2a + 2b(x+y) = 2(a+b)(x+y) raccogliendo 2 a fattor comune.

- Dimostra con un esempio che i due termini non sono equivalenti e spiega qual è l'errore.

(C) x – (–x) = x x = x^2 eliminando a 2 a 2 le negazioni, cioè applicando la regola **–(–*a*) → *a*** a –(–x).

- Opera la sostituzione *x* = –1, verifica che i termini non sono equivalenti e spiega qual è l'errore.

(D) $\frac{10+x}{5x} = \frac{2+x}{x}$ applicando $\frac{c \cdot a}{c \cdot b} \rightarrow \frac{a}{b}$,

cioè eliminando il fattore 5 comune ai due termini della divisione

- Dimostra con un esempio numerico che i due termini non sono equivalenti e spiega qual è l'errore.

(E) 1 / x / x = 1/1 = 1 applicando ***a* / *a*** → 1.

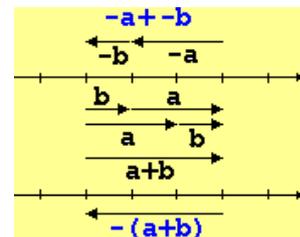
- Verifica con CT che 1 / x / x in genere non vale 1 e spiega qual è l'errore.

14 La figura a lato illustra il seguente fatto: eseguire gli spostamenti –*a* e –*b* (opposti a due spostamenti *a* e *b*) equivale a eseguire lo spostamento –(*a*+*b*), opposto allo spostamento complessivo (somma di *a* e *b*).

Quale, tra (1) e (2), è la proprietà matematica corrispondente?

(1) la proprietà distributiva della negazione rispetto alla addizione

(2) la proprietà distributiva della addizione rispetto alla negazione

Completa le regole di riscrittura che corrispondono a questa proprietà:

15 Riportiamo altri errori.

(F) x – (x – 3) = –3

- Spiega qual è l'errore dopo aver svolto correttamente il calcolo (trasformando la differenza in somma e poi distribuendo la negazione)

(G) –(a b) = (–a)(–b) (con l'intenzione di distribuire la negazione)

- Dimostra con un esempio che i due termini non sono equivalenti e spiega qual è l'errore.

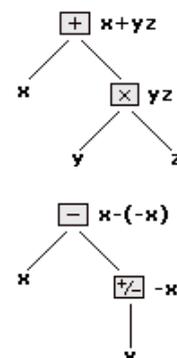
(H) *Guadagno* = *Incasso* – $Spesa_1$ + $Spesa_2$ ottenta da: *Guadagno* = *Incasso* – *Spese* con la sostituzione: *Spese* = $Spesa_1$ + $Spesa_2$

- Spiega qual è l'errore

Non è difficile capire né ricordare le proprietà che si utilizzano per manipolare i termini. Basta un minimo di riflessione o qualche esempio numerico per vedere quando una regola di riscrittura trasforma un termine in uno equivalente. La difficoltà sta nell'individuare, man mano, quale regola di riscrittura applicare e nell'applicarla nel modo giusto, come hanno messo in luce gli esercizi precedenti.

Gli ***errori*** esaminati in questi esercizi possono essere raggruppati in tre classi:

(1) Casi in cui non si presta attenzione alla struttura del termine e *si applica una regola di riscrittura a una espressione che non è un sottotermine*.

- Ad es. nel caso *A* del ques. 13 non si è tenuto conto che x+y non è un sottotermine di x+yz; infatti x+yz, esplicitando tutti i simboli di operazione e delimitando i sottotermini con parentesi, assume la forma: x+(y·z). E così: in *B* 2a+2b non è un sottotermine; in *E* x/x non è un sottotermine, infatti 1/x/x sta per (1/x)/x.
- Nel caso *C* si è interpretato –(–x) come sottotermine di x–(–x) mentre, in questo caso, il primo "–" rappresenta la "sottrazione", non una "negazione", per cui –(–x) non è un sottotermine (nella regola –(–**a**) → **a** entrambi i "–" sono invece simboli di negazione).
- Nel caso *D* si voleva semplificare il termine dividendo per 5 i due termini della divisione, ma si è preso come primo termine 10 invece che tutto 10+x.

(2) Casi in cui si applica una regola di riscrittura *dimenticando di introdurre, quando è necessario, delle parentesi per delimitare il sottotermine* a cui si applica la regola.

- Nell'esempio *H* si è trasformato *Guadagno* = *Incasso* – *Spese* mettendo brutalmente $Spesa_1 + Spesa_2$ al posto di *Spese*: $Guadagno = Incasso - Spesa_1 + Spesa_2$. Se non si introduce una coppia di parentesi il secondo termine della sottrazione diventa $Spesa_1$ invece di $Spesa_1 + Spesa_2$; cioè occorre scrivere:

$$Guadagno = Incasso - (Spesa_1 + Spesa_2).$$

- Anche nell'esempio *F* si è fatto un errore simile: si è pensato, giustamente, di modificare x–(x–3) trasformando le sottrazioni in addizioni dell'opposto, ma, invece di fare l'opposto di tutto x–3, si è fatto solo quello di x. Cioè si è ragionato seguendo mentalmente questo procedimento:

$$x - (x - 3) = x + -x - 3 = x + -x + -3 = 0 + -3 = -3$$

invece che nel seguente modo, corretto: $x - (x - 3) = x + -(x + -3) = x + -x + --3 = 0 + 3 = 3$

(3) Nel caso *G* invece si è *inventata una regola in "analogia"* con altre, senza preoccuparsi se corrisponde a qualche proprietà vera: si è inventata la distributività della negazione rispetto alla moltiplicazione, che invece vale solo rispetto all'addizione.

16 Esamina le seguenti manipolazioni di termini e cerca di individuare e correggere gli eventuali errori.

(I) $(3x+3)(x-1-x+1)+4 \to (3x+3)(\cancel{x}-\cancel{1}-\cancel{x}+\cancel{1})+4 \to 3x+3+4$ ("cancellando")

(L) $\dfrac{x+kx}{x} \to \dfrac{\cancel{x}+k\cancel{x}}{\cancel{x}} \to k$ ("eliminando il fattor comune")

(M) $3xy+y+9y^2 \to (3x+9y)y$ ("portando fuori il fattor comune")

(4) In questo esercizio abbiamo visto un'altra categoria di ***errori***. Anche queste sono situazioni in cui non si presta attenzione alle *proprietà* degli oggetti matematici rappresentati dalle espressioni manipolate; in questi casi la disattenzione è dovuta all'uso di *espressioni verbali* come "cancello", "porto fuori", "semplifico", … senza tener conto delle diversità di significato rispetto al linguaggio comune.

Nel primi due calcoli si sono usate le espressioni "cancello" e "elimino" nel significato corrente: in *I* si è fatto x–x → "niente" e 1–1 → "niente", mentre si sarebbe dovuta applicare la regola ***a–a*** → 0; in *L* si è fatto x/x → "niente", mentre si sarebbe dovuta applicare la regola ***a*/*a*** → 1.

In *M* si è usato "porto fuori y" come nel linguaggio comune, senza tener conto che si tratta di una espressione usata *convenzionalmente* per indicare l'applicazione di ***ad*+*bd*+*cd*** → **(*a*+*b*+*c*)*d*** e che quindi occorre pensare $3xy+y+9y^2$ come $3xy+1\cdot y+9y^2$, usando ***a*** → **1·*a***.

Ogni volta che si fa un passo durante la trasformazione di un termine può essere utile, soprattutto per i primi tempi, provare a esplicitare (a parole e con una regola di riscrittura) il procedimento che si è impiegato. Questo aiuta a controllare se sono presenti errori. Si rallenta un po' *la velocità di calcolo*, ma questa *non è la cosa più importante*: l'importante è non commettere errori.

Come già osservato, in caso di incertezza (nel trovare il procedimento da usare o nel controllo della regola scelta o della sua applicazione) può essere utile fare qualche esempio numerico o pensare a qualche situazione d'uso, di tipo geometrico-fisico (come si è visto dopo il ques. 8 o nel ques.14) o di altro genere: ad es. il ricordo che, premendo 2 volte [1/x], sul visore ricompare il numero di partenza può suggerire la regola $\mathbf{1/(1/}\boldsymbol{a}\mathbf{)} \to \boldsymbol{a}$.

Del resto, ai nostri giorni, anche i calcoli simbolici vengono svolti utilizzando opportuni programmi al calcolatore. Ciò che occorre è scrivere i termini correttamente (cioè seguendo il linguaggio – convenzioni, simboli, … – utilizzato dal programma che si impiega) e dare man mano i comandi giusti per effettuare le trasformazioni che ci interessano. E per entrambe queste cose occorre *avere chiara la struttura del termine* su cui si opera e *saper individuare le regole di riscrittura* che si vogliono applicare.

Nel paragrafo di esercizi sono presenti altre riflessioni sulla riscrittura dei termini, altre saranno affrontate in schede di lavoro successive. Per una sintesi potrai poi usare *Gli oggetti matematici*.

3. Equazioni equivalenti

I procedimenti per riscrivere termini sono spesso impiegati per trasformare formule.

Ad es. nel passare da $percentuale = parte\,/\,totale \cdot 100$ a $percentuale = parte \cdot (100\,/\,totale)$ si trasforma il secondo membro dell'equazione. Altre volte si opera contemporaneamente su entrambi i membri dell'equazione. Ad es. per trasformare 181 = x + 127 nella forma x = … abbiamo fatto:

$$181 = x + 127 \iff 181 - 127 = x + 127 - 127 \iff 54 = x \iff x = 54$$

Il simbolo "<=>" serve per indicare che la formula alla sua sinistra è equivalente a quella alla sua destra. È una "sintesi" dei simboli "=>" e "<=" usati, rispettivamente, nel significato di "implica" ("A implica B": se l'equazione A è vera allora è vera anche l'equazione B) e "segue da" ("A segue da B": se l'equazione B è vera allora è vera anche l'equazione A).

Nel primo "passaggio" abbiamo applicato a entrambi i termini dell'equazione l'operazione inversa di "+127", cioè "–127", in modo da isolare la x. Nell'ultimo passaggio abbiamo scambiato primo e secondo membro, sfruttando la "simmetria" dell'eguaglianza (***a*=*b*** equivale a ***b*=*a***).

In generale, per trasformare un'equazione, si utilizzano, oltre all'eventuale scambio dei due membri, procedimenti di questo genere:

applicare a entrambi i membri una stessa funzione

Vediamo qualche altro esempio:

(1)	negazione	$-x = 42 \iff --x = -42 \iff x = -42$
(2)	reciproco	$1/x = 8 \iff (1/x)^{-1} = 8^{-1} \iff x = 1/8$ [= 0.125]
(3)	radice quadrata	$A = L^2 \iff \sqrt{A} = \sqrt{(L^2)} \iff \sqrt{A} = L \iff L = \sqrt{A}$ *[vedi nota]*
(4)	divisione	$2x = 15 \iff 2x/2 = 15/2 \iff x = 15/2$ [= 7.5]

Nei casi (1), (2) e (3) abbiamo applicato a entrambi i membri una funzione a 1 input.

Nel caso (4) abbiamo applicato la funzione "/2", cioè, ad essere più precisi, abbiamo applicato sia a sinistra che a destra di "=" la funzione "/" (che è a due input), prendendo come primo input ciascun membro dell'equazione, come secondo input lo stesso termine 2, in modo da garantire l'eguaglianza delle uscite.

Analogamente, nell'esempio iniziale (181 = x+127), avevamo applicato "–127", cioè la sottrazione prendendo come primo input i membri dell'equazione e come secondo input 127.

Nota

Il caso (3) rappresenta l'equivalenza tra la formula che esprime l'area di un quadrato in funzione della misura del lato e la formula inversa che esprime il lato in funzione dell'area. Se con A e L avessimo inteso rappresentare numeri qualunque l'equivalenza corretta sarebbe stata:

$$(A = L^2 \ e \ 0 \le L) \iff \sqrt{A} = L$$

in quanto la sostituzione di $\sqrt{(L^2)}$ con L produce un termine equivalente solo se L non è negativo: $\sqrt{((-4)^2)} = \sqrt{(4^2)} = 4 \ne -4$ (*La automazione*, scheda 2, §6).

Analogamente l'equivalenza a fianco vale solo se N≠0. In altre parole S=P·N è impiegabile anche nel caso in cui non acquisto nulla: S=P·0=0 (se non compro nulla non spendo nulla), P=S/N no (la divisione per 0 non è definita). Dovremmo quindi scrivere:

S = Spesa *P* = Prezzo Unitario
N = Numero Pezzi Acquistati
$S = P \cdot N \iff P = S/N$

$$(S = P \cdot N \quad e \quad N \ne 0) \iff P = \frac{S}{N}$$

Su problemi di questo genere torneremo in seguito, man mano che li incontreremo.

4. Equivalenza algebrica e altri tipi di equivalenza

Un uso tipico dei procedimenti di trasformazione di termini in termini equivalenti è quello per svolgere un calcolo mediante una CT.

17 Qui sotto, nella 1ª riga, sono indicati tre calcoli che si vogliono eseguire disponendo di una CT che non ha incorporata la priorità delle operazioni e senza usare la memoria. Nelle righe successive sono indicati i procedimenti di riscrittura impiegati per arrivare man mano a un calcolo eseguibile "a catena" (le prime due colonne rappresentano due alternative per lo stesso calcolo).

Per ogni regola di riscrittura *indica* nell'espressione soprastante il sottotermine che corrisponde ad ***a***, quello che corrisponde a ***b***, … *Completa* l'ultima riga indicando la sequenza di tasti da battere.

10000 – 27·(175 + 97)	10000 – 27·(175 + 97)	$48 \cdot \frac{77}{235-168}$
a – b → –b + a	**a – b → –(b – a)**	$\mathbf{a \cdot \frac{b}{c} \to \frac{1}{c} \cdot a \cdot b}$
– 27·(175 + 97) + 10000	– (27·(175 + 97) – 10000)	$\frac{1}{235-168} \cdot 48 \cdot 77$
a · b → b · a	**a · b → b · a**	....
– (175 + 97)·27 + 10000	– ((175 + 97)·27 – 10000)	
....	....	

Abbiamo visto che trasformando termini in termini equivalenti calcolabili "a catena" si può rendere più semplice l'uso di una CT. Ma di fronte a due termini equivalenti calcolabili a catena una CT fornisce sempre lo stesso risultato?

18 ***a + b – c*** si può riscrivere come ***a – c + b*** ($a + b - c \to a + b + -c \to a + -c + b \to a - c + b$).
Calcola 12345678 + 0.123456 - 12345670 e 12345678 - 12345670 + 0.123456 con la tua CT e confronta i due risultati ottenuti. I tuoi compagni hanno ottenuto gli stessi risultati?

19 ***a / b · c*** può essere riscritto come ***a · c / b*** ($\frac{a}{b} \cdot c \to a \cdot \frac{1}{b} \cdot c \to a \cdot c \cdot \frac{1}{b} \to \frac{a\,c}{b}$)
Calcola 1 / 3 · 3 – 1 e 1 · 3 / 3 – 1 con la tua CT e confronta i due risultati ottenuti. I tuoi compagni hanno ottenuto gli stessi risultati?

Gli ultimi due quesiti mostrano che non sempre due termini equivalenti, anche quando la CT li esegue nel giusto ordine, danno luogo allo stesso risultato. Nella scheda 2 di *La automazione* è spiegato ciò che è all'origine degli "strani" risultati ottenuti. Concludendo possiamo osservare che l'***equivalenza tra termini*** può essere considerata da punti di vista diversi.

Dal punto di vista del ***tempo di calcolo*** con una CT, 357+69 e 69+357 sono equivalenti in quanto per calcolarli devo battere esattamente gli stessi tasti.

Invece –69+357 e 357–69 non lo sono: nel primo caso devo battere un tasto in più. Per fare un altro esempio, nel caso eseguissi i calcoli a mano, 7·254 è più dispendioso di 254·7 (*vedi* l'illustrazione a fianco).

```
 254 x       7 x
   7 =     254 =
 ----     ----
1778        28 +
           350 +
          1400 =
          ----
          1778
```

Nel quesito 18 abbiamo visto due termini non equivalenti dal punto di vista della ***precisione del calcolo*** se si opera con una CT: a seconda del termine che considero posso conoscere il risultato con tutte o con una parte delle cifre.

I termini del quesito 19 da questo punto di vista non sono equivalenti neanche procedendo a mano. Calcolando 1/3 posso ottenere 0.33 o, se vado avanti nella divisione, 0.33333, e così via, ma a un certo punto mi devo fermare. Nel moltiplicare questo risultato per 3 ottengo 0.99 o 0.99999 o …, ma non ottengo mai esattamente 1. Se invece di $1/3\cdot 3$ calcolo $1\cdot 3/3$ ottengo esattamente $(1\cdot 3)/3 = 3/3 = 1$.

Dal punto di vista "teorico" in tutti i casi sopra considerati avevamo di fronte termini equivalenti. Per distinguere questa equivalenza teorica dalle equivalenze più "operative" di cui abbiamo appena discusso possiamo parlare di ***termini algebricamente equivalenti***. Quindi diremo che $a+b-c$ è algebricamente equivalente a $a-c+b$ (cioè è equivalente dal punto di vista del calcolo simbolico) anche se può non esserlo dal punto di vista del calcolo numerico.

5. Esercizi

e1 Tra le seguenti equazioni, quali, fissata **u** e presa **w** come incognita, hanno un'unica soluzione? Quali hanno un'unica soluzione se si fissa **w** e si prende **u** come incognita?
[prima di fare calcoli simbolici, cerca di descrivere a parole il significato dell'equazione e prova a ragionare su degli esempi numerici; ad es. risolvere la prima equazione rispetto a **w** è un problema che può essere espresso con: «quali sono i numeri **w** che sommati a **u** danno 0?»]

$$u+w=0 \qquad uw=1 \qquad u^2=w \qquad w=|u| \qquad u^2=w^2 \qquad u=0w$$

e2 Maria dice a Paolo: «Pensa un numero intero, raddoppialo, aggiungi 25, moltiplica per 2, aggiungi 10, dividi per 4. Dimmi che cosa ottieni e io *indovinerò* quale numero hai pensato».

(*1*) Maria non è una maga: semplicemente toglie 15 al numero finale ottenuto da Paolo. *Verificate* con qualche prova che il "trucco" funziona.

(*2*) Proviamo a ***dimostrare*** che il trucco funziona *in **ogni** caso*, cioè che qualunque sia il numero x pensato, togliendo 15 al numero ottenuto alla fine si riottiene x.

Il calcolo man mano eseguito da Paolo può essere così descritto:

$$x \qquad 2x \qquad 2x+25 \qquad 2(2x+25) \qquad 2(2x+25)+10 \qquad \frac{2(2x+25)+10}{4}$$

Il termine finale è il numero ottenuto. Sottrai 15 e *verifica* che si ottiene effettivamente x:

$$\frac{2(2x+25)+10}{4} - 15 = \frac{\ldots \quad +10}{4} - 15 = \frac{4x+60}{4} - 15 = \frac{\ldots}{\ldots} + \frac{\ldots}{\ldots} - 15 = \ldots$$

(*3*) Vediamo come è stato "inventato" questo gioco. Indicando con Q il numero finale si è descritto il problema sotto forma di equazione e si è ricavata x in funzione di Q. Cioè si è risolta rispetto all'incognita x l'equazione:

$$Q = \frac{2(2x+25)+10}{4}$$

Completa le seguenti trasformazioni:

$$Q = \frac{2(2x+25)+10}{4} \iff \ldots = 2(2x+25)+10 \iff \ldots = 4x+50+10 \iff$$

$$\ldots - 60 = \ \ldots \iff \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = x \iff \ldots\ldots = x$$

(*4*) *Inventa* una nuova versione di questo gioco.

e3 La visione di un film in un Cineclub costa 5 € ai soci e 6 € ai non-soci. La tessera annuale costa 10 €. In quali casi conviene farsi soci?
Per rispondere risolvi prima la seguente equazione rispetto a N: $10+5N = 6N$

e4 Abbiamo che: $(ab)^3 \to (ab)(ab)(ab) \to (aaa)(bbb) \to a^3\, b^3$

Possiamo esprimere la trasformazione del termine iniziale nel termine finale dicendo che abbiamo portato l'elevamento a potenza dentro alla moltiplicazione o che abbiamo distribuito l'elevamento a potenza rispetto alla moltiplicazione. Più in generale abbiamo la *regola di riscrittura*:

$$(ab)^c \;\to\; a^c\, b^c$$

Ad esempio possiamo usare tale regola (con **c**=2) per calcolare velocemente 300^2:

$$300^2 = (3\cdot 100)^2 = 3^2\cdot 100^2 = 9\cdot 10\,000 = 90\,000$$

Si può dimostrare che tale regola dà luogo a termini equivalenti anche quando **c** non è un numero intero positivo. *Completa* i seguenti calcoli, specificando che cosa è **c**:

$400^{-1} = (4\cdot 100)^{-1} =$ ………………… $= 1/4\cdot 0.01 = 0.25\cdot 0.01 = 0.0025$ $\quad c = ?$

$\sqrt{1600} = \sqrt{(16\cdot 100)} = (16\cdot 100)^{1/2} =$ ………………… $= \sqrt{16}\cdot\sqrt{100} =$ …………. $\quad c = ?$

Nota. Nell'applicare questa regola di riscrittura, analogamente a quanto si è visto a proposito delle regole per riscrivere le equazioni, occorre fare attenzione.

Ad es. non sempre si può distribuire la radice quadrata (cioè l'elevamento alla 1/2).

Nel caso a fianco, sopra, si otterrebbe la trasformazione in un termine che non è definito, mentre moltiplicando direttamente avremmo ottenuto:

$$\sqrt{(-9\cdot -4)} = \sqrt{-9}\cdot\sqrt{-4}$$

$$\sqrt{(-9\cdot -4)} = \sqrt{36} = 6$$

e5 Abbiamo visto nel quesito precedente che l'operazione di passaggio al reciproco, essendo equivalente ad un elevamento alla –1, si può distribuire rispetto al prodotto, cioè che si può applicare la *regola* a fianco:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a\cdot b}} \to \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{b}}$$

Possiamo anche applicare la regola opposta:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{b}} \to \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a\cdot b}}$$

Del resto abbiamo già altre volte usato il fatto che dividere per **a** e poi per **b** equivale a dividere per **a·b**.

Usando queste regole e trasformando divisioni in moltiplicazioni per reciproci o viceversa, possiamo, ad esempio, riscrivere il termine sotto a sinistra nel modo seguente:

$$\frac{1}{w}\,y\,\frac{x}{z} = \frac{1}{w}\,yx\,\frac{1}{z} = xy\,\frac{1}{z}\,\frac{1}{w} = xy\,\frac{1}{zw} = \frac{xy}{zw}$$

$\frac{xy}{zw}$ è un termine frazionario, cioè del tipo $\frac{\textit{termine1}}{\textit{termine2}}$

Trasformalo in un termine con solo moltiplicazioni e reciproci.

e6 A e B sono due grandezze legate dalla relazione a fianco, dove h e k sono dei valori fissati. L'equazione considerata esprime A in funzione di B. La formula inversa può essere ottenuta nel modo seguente:

$$A = hB + 2kB + B$$

$$A=hB+2kB+B \iff A=hB+2kB+1B \iff A=(h+2k+1)B \iff \frac{A}{h+2k+1} = B$$

dove, per applicare il raccoglimento a fattor comune, si è prima trasformato B in 1·B (commento al ques.16-M).

Sotto sono indicati per esteso i procedimenti usati da due alunni per trovare B in funzione di A nel caso della relazione a fianco.

$$A = hB + 2kB - B$$

Completa le parti mancanti, *indica* quale dei due procedimenti è sbagliato e cerca di *capire* quale ragionamento ha seguito l'alunno che ha sbagliato.

(1) $A=hB+2kB-B \iff A=(h+2k-0)B \iff A=(\ldots.+\ldots.)B \iff$ …….. $= B$

(2) $A=hB+2kB-B \iff A=hB+2kB+-B \iff A=hB+2kB+(-1)B \iff$
$A=(\ldots. + \ldots. + \ldots.)B \iff A=(\ldots. + \ldots. - \ldots.)B \iff$ …….. $= B$

e7 Per trasformare il termine iniziale nel termine finale

$$\frac{\mathbf{2w+w^2-wz+2zw}}{\mathbf{2+w+z}} = \frac{\mathbf{2w+w^2-wz+2wz}}{\mathbf{2+w+z}} = \frac{\mathbf{2w+w^2+(-1+2)wz}}{\mathbf{2+w+z}} = \frac{\mathbf{2w+w^2+wz}}{\mathbf{2+w+z}} = \frac{\mathbf{w(2+w+z)}}{\mathbf{2+w+z}} = \mathbf{w}$$

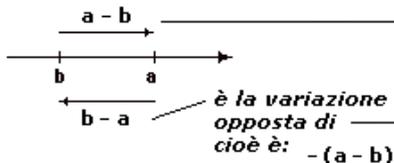
si sono applicati i seguenti procedimenti. Scrivi nei riquadri il numero d'ordine con cui sono stati usati.

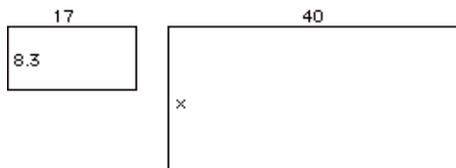
☐ calcolo di addizione ☐ riordino di moltiplicazioni ☐ semplificazione di frazione
☐ raccoglimento a fattor comune ☐ raccoglimento a fattor comune

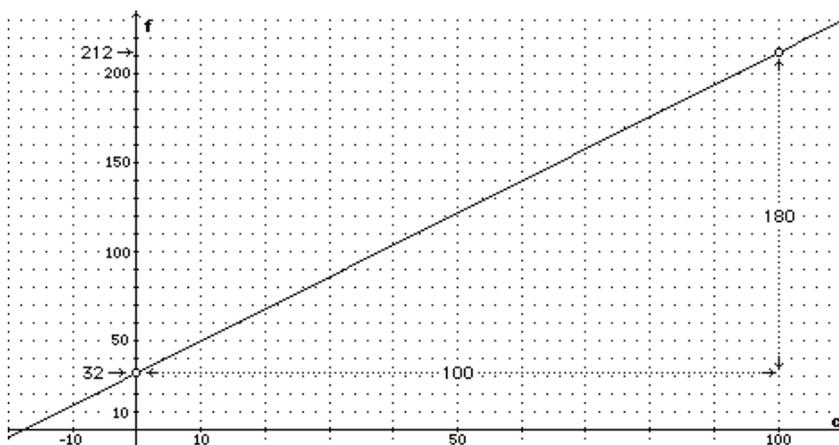
e8 *"Dividendo o moltiplicando i due termini di una frazione per uno stesso numero* (diverso da 0) *si ottiene una frazione equivalente*" è un modo in cui possono essere espresse verbalmente le regole:

$$\frac{a\cdot c}{b\cdot c} \to \frac{a}{b} \quad \text{e} \quad \frac{a}{b} \to \frac{a\cdot c}{b\cdot c}$$

Calcola mentalmente la divisione 7526/5 e spiega a parole come hai proceduto.

e9 Quale proprietà suggerisce la figura a fianco?

Quali regole di riscrittura puoi dedurne?

e10 Un disegno che occupa un rettangolo lungo 17 cm e largo 8.3 cm deve essere ingrandito fino a occupare un rettangolo lungo 40 cm. Indicata con x la larghezza del nuovo rettangolo, scrivi un'equazione che traduca la frase «x sta a 40 come 8.3 sta a 17» e risolvila arrotondando il risultato ai millimetri.

e11 Abbiamo più volte rappresentato la relazione tra valore in °C e valore in °F di una temperatura sia sotto forma di grafico, sia sotto forma di equazione:

$$f = 32 + 1.8\,c$$

Effettua i cambi di unità di misura sotto indicati procedendo sia graficamente (scrivi nel primo "…" il valore che riesci a stimare col grafico) sia ricorrendo all'equazione (scrivi nel secondo "…" il valore che ottieni arrotondato ai decimi).

$c = 60$ $\quad f = ...$ $\quad f = 32+1.8c = ...$ $\qquad c = -12$ $\quad f = ...$ $\quad f = 32+1.8c = ...$

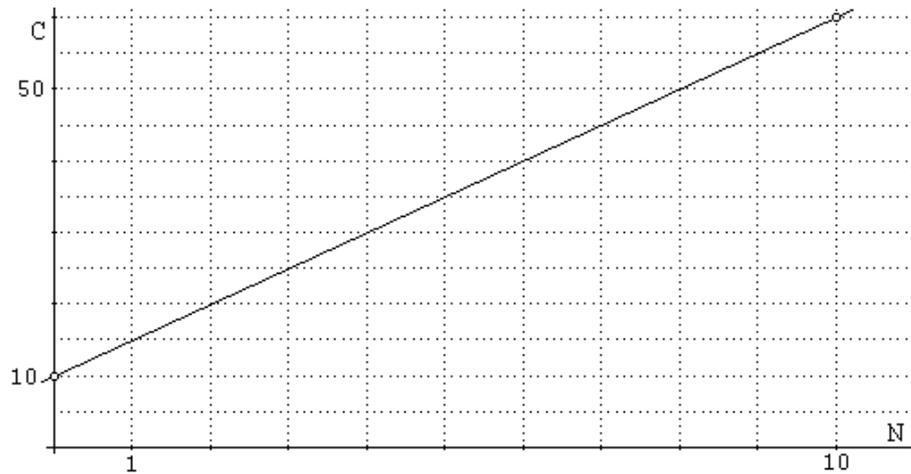
$f = 86$ $\quad c = ...$ $\quad c = \dfrac{f-32}{1.8} = ...$ $\qquad f = 60$ $\quad c = ...$ $\quad c = \dfrac{f-32}{1.6} = ...$

e12 Due cineclub praticano le seguenti tariffe: il primo 10 € di tessera annuale più 5 € a film; il secondo 20 € di tessera annuale più 3.5 € a film. Senza entrare nel merito dei film proiettati, indicato con N il numero di film all'anno che si vedranno, *stabilisci* per quali valori di N conviene l'iscrizione al primo club e per quali conviene l'iscrizione al secondo. Risolvi questo problema in due modi:

(1) Scrivi le equazioni che rappresentano il costo C annuale in funzione di N nei due casi (per il primo cineclub abbiamo già visto nel quesito e3 che C=10+5N);

(2) Risolvi rispetto a N l'equazione 10+5N = … (al posto di "…" metti il termine che rappresenta il costo in funzione di N nel caso del secondo club).

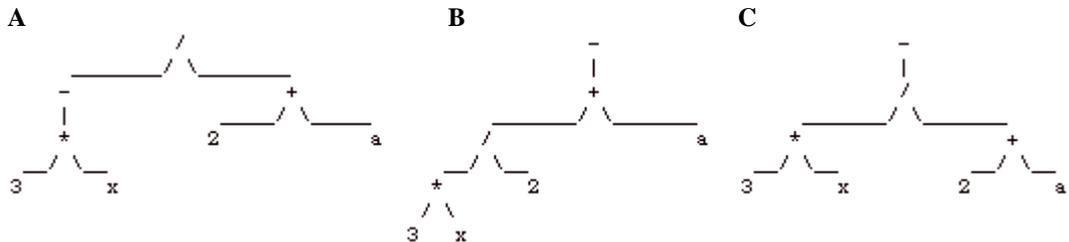
Oppure:

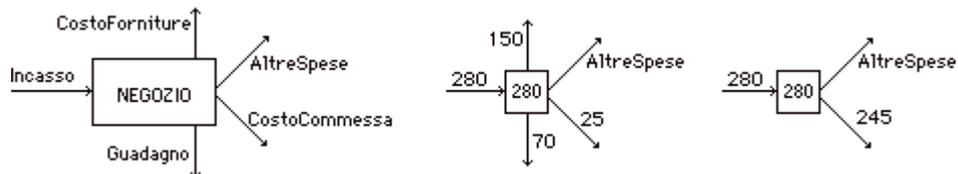
(2 bis) Traccia il grafico delle due equazioni C=10+5N e C=… e trova l'intersezione dei loro grafici (sotto è già tracciato il grafico della prima equazione: è la retta che passa per i punti (0,10) - punto che corrisponde alla situazione: 0 film, costo annuale di 10 € - e (10,60) - punto che corrisponde alla situazione: 10 film, costo annuale di 60 €).

e13 (1) Senza fare disegni, stabilisci se si incontrano, e in che punto, le due rette che sono grafico delle funzioni $x \mapsto 3x+4$ e $x \mapsto 2x+6$.
(2) Come sopra, nel caso delle funzioni $x \mapsto 7x+14$ e $x \mapsto 7x+15$.

e14 "due meno il prodotto di A più B per sette" è una possibile descrizione verbale di 2–(A+B)·7. Prova a descrivere verbalmente:

$$3+\frac{A+B}{X+A}\cdot B \qquad 3+\frac{A+B}{X+A\cdot B}\cdot B \qquad \frac{3+A+B}{(X+A)\cdot B} \qquad -\frac{A}{Z} \qquad \frac{-A}{Z}$$

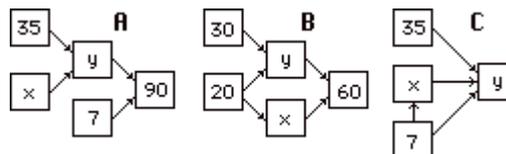
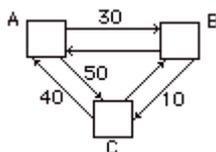
e15 Associa ad ognuno dei seguenti termini il grafo ad albero che lo rappresenta.

$$-\left(\frac{3\cdot x}{2}+a\right) \qquad -\frac{3\cdot x}{2+a} \qquad \frac{-3\cdot x}{2+a}$$

e16 «Un negoziante incassa in un anno 280 mila €, ne spende 25 per una commessa (stipendio+contributi) e 150 per pagare i fornitori, e guadagna 70 mila €. A quanto ammontano le altre spese (telefono, energia elettrica, tassa sui rifiuti, manutenzioni, …)?»
Questo problema può essere schematizzato sia con un'equazione che con un grafo:

Incasso = CostoCommessa + CostoForniture + AltreSpese + Guadagno

Per risolvere il problema appoggiandosi al grafo, si possono mettere a fianco delle frecce che rappresentano flussi di denaro conosciuti i relativi valori e si possono poi conglobare in un'unica freccia i valori in uscita che sono noti, arrivando al grafo sulla destra. Di qui si può ricavare che AltreSpese = 280-245=35 (mila €).

Risolvi il problema usando l'equazione (sostituisci prima alle variabili che rappresentano grandezze note i relativi valori, utilizzando come unità di misura le migliaia di euro).

Negli *esercizi seguenti* vedremo altri problemi che si possono schematizzare e risolvere con un grafo, ma che non è facile risolvere con tecniche di calcolo simbolico.

e17 Nei grafi a fianco cerca di trovare i valori di y e di x. Vi sono casi in cui ciò ti risulta impossibile? Vi sono casi in cui per x o per y puoi trovare più valori?

e18 Tre paesi immaginari A, B e C vivono in un'*economia chiusa*: ciascun paese esporta solo negli altri due e importa solo dagli altri due.

Supponiamo che ciascun paese sia commercialmente in pareggio: esporta tanto quanto importa. Possiamo perciò rappresentare gli scambi commerciali con un grafo.

Se A esporta merci per 30 milioni in B e per 50 milioni in C e se C importa per altri 10 milioni da B ed esporta per 40 milioni in A, a quanto ammontano gli scambi commerciali di B? (cioè quale numero deve essere scritto nel riquadro B del grafo?)

e19 Cinque amici hanno dei debiti/crediti tra di loro: A deve 40 € a D, D deve 80 € a E, C deve soldi sia a D che a E (ma non si ricorda quanto deve a ciascuno), B deve dei soldi a D (ma non si ricorda quanti). C sa che ha un debito complessivo di 30 €, D sa di essere "in pareggio", E sa che gli devono essere restituite in tutto 100 €. Rappresenta questa complessa situazione con un grafo e trova a quanto ammontano i debiti di B. Quali sono i nodi iniziali e finali del grafo?

1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini:

riordinare un prodotto (§2), *portar fuori la negazione* (ques.12), *rimpiazzare un sottotermine* (dopo ques.9), *raccogliere a fattor comune* (dopo ques.10), *trasformare un'equazione* (§3), *equivalenza dal punto di vista della precisone del calcolo* (dopo ques.19).

2) Su un foglio da "quadernone", nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").

La automazione

Dalle macchine semplici alle macchine programmabili

Scheda **4**

Altro software

1. Hardware e software: una breve sintesi

Per immagazzinare dati, programmi, … senza ingombrare permanentemente la memoria del computer, per memorizzare informazioni da usare su più computer, … si ricorre a ***supporti per la memorizzazione*** sui quali possono essere registrate (e lette) con tecniche opportune sequenze di bit di varia lunghezza. Più personal computer possono essere collegati in ***rete*** in modo da poter mettere in comune dati, programmi, risorse (ad es. una stampante). L'insieme dei programmi in linguaggio macchina che il calcolatore impiega per il suo funzionamento (per gestire programmi vari, per comunicare con *unità periferiche* - stampanti, supporti di memorizzazione, …) è detto ***sistema operativo*** (i sistemi operativi più diffusi, *al momento*, sono Windows, Mac-OS, Linux). Una sequenza di informazioni registrata (in forma codificata, nella memoria del computer o su un supporto di memorizzazione) con un *nome* specifico viene detta ***file*** (termine inglese il cui significato originale è "archivio"); ad es. un file può essere costituito da una successione di dati numerici, da un programma, da un testo, da una rappresentazione grafica ,… La misura della memoria di solito viene espressa mediante un'unità pari a 2^{10} (=1024) *byte*, detta *kilobyte* (e indicata con KB o, più in breve, **K**) poiché 1024 ~ 1000. Per quantità maggiori si ricorre ai *Megabyte*: 1 MB = K^2 ~ 1 milione di byte (*nota*: si usa KB invece di kB in quanto con la k minuscola si indicherebbero esattamente 1000 B).

La struttura fisica del calcolatore (cioè l'insieme dei dispositivi meccanici, elettrici, magnetici ed elettronici che lo compongono) viene detta ***hardware*** (termine inglese il cui significato originale è "ferramenta"; è derivato da "hard" = "duro" e "ware" = "oggetto" per indicare letteralmente una "collezione di oggetti duri"), mentre i programmi vengono indicati con il termine ***software*** (neologismo, cioè nuova parola, che significherebbe letteralmente "collezione di oggetti molli"). I programmi d'uso generale (con cui si possono creare file di vario genere) vengono chiamati anche ***applicazioni*** e i file (programmi, testi, disegni,collezioni di dati, …) creati e leggibili mediante essi vengono detti ***documenti***. Sono applicazioni anche i *browser*, ossia i programmi per leggere e attivare i collegamenti presenti in ***ipertesti*** come questo.

2. I fogli elettronici

Tra gli strumenti per automatizzare procedimenti di calcolo particolarmente usati sono da ricordare i ***fogli elettronici*** (*spread sheet*). Ne esistono vari tipi, tutti con un funzionamento simile, senza particolari differenze nelle prestazioni tra i prodotti a pagamento e quelli "*freesoftware*" (liberamente utilizzabili, presenti nei CD allegati a riviste informatiche o "scaricabili" via Internet). Essi permettono di preparare, elaborare (e rappresentare graficamente) *tabelle* di dati simili alla seguente, relativa ad una scuola secondaria superiore (già considerata nella scheda 4 di *Le statistiche*). Nelle celle (A1, B1, …, A2, B2, …) si possono mettere costanti numeriche, costanti stringa o espressioni come quella nella cella A7, che, nell'uso, vengono chiamate *formule.*

(2.1)

		a.s. 2006/07		a.s. 2007/08	
		totale iscritti	ripetenti	totale iscritti	ripetenti
		A	**B**	**C**	**D**
classe 1ª	**1**	181	81	154	36
classe 2ª	**2**	146	38	126	35
classe 3ª	**3**	245	48	148	37
		…	…	…	
	7	=A1-D1-C2+D2			
	8	=A2-D2-C3+D3			

La "formula" in A7 va interpreta come un'assegnazione: *PONI A7* = A1-D1-C2+D2, che in questo caso equivale ad assegnare alla cella A7 il valore 181-36-126+35.

Con opportuni comandi azionabili con la tastiera o il mouse si può far sì che sullo schermo la tabella passi dallo stato precedente a quello parzialmente riprodotto sotto, con la visualizzazione del valore assegnato alle celle contenenti formule.

A7 rappresenta gli abbandoni tra 1° e 2° anno: da A1 (ex iscritti al 1°) si tolgono D1 (ri-iscritti al 1°) e * (passati al 2°); * è uguale a C2 (totale iscritti al 2°) meno D2 (ripetenti). Analogamente A8 rappresenta gli abbandoni tra 2° e 3°.

(2.2)

7	54			
8	8			

Le ***variabili*** A1, D1, … impiegate in queste assegnazioni, a differenza di quelle impiegate nei linguaggi di programmazione, non sono dei nomi generici, ma nient'altro che le coordinate delle celle della tabella. Esse rappresentano il valore numerico della cella o il valore associato alla cella da un'altra assegnazione.

1 Se in B7 metto la formula =A2/100 quale valore viene associato a B7?
E se ci metto la formula =A7?

I ***dati*** da elaborare non vengono introdotti mediante istruzioni di input, ma devono essere battuti direttamente nelle varie celle della tabella. Se ci si accorge che si è sbagliata la battitura di un dato o se, comunque, si vuole cambiarlo, basta posizionarsi sulla cella (con il mouse o con i tasti direzionali) e ribatterlo: automaticamente vengono ricalcolati e modificati anche i valori delle celle A7 e A8. Il foglio elettronico, ogni volta che si modifica una cella ***ricalcola*** tutti i valori.

Con opportuni comandi (con la tastiera o il mouse) si possono selezionare delle celle, memorizzarne il contenuto e riprodurlo in altre celle. Se si tratta di una costante, essa viene riprodotta tale e quale; se è una formula, può essere riprodotta in forma modificata.

Ad esempio nella tabella precedente la formula in A8 (abbandoni tra 2ª e 3ª) non è stata battuta direttamente: è stata selezionata la cella A7 (abbandoni tra 1ª e 2ª) e se ne è riprodotto il contenuto in A8. Nella riproduzione la ***formula** è stata **automaticamente modificata***; poiché rispetto ad A7 ci siamo spostati in basso di un posto, automaticamente le variabili vengono modificate in modo da riferirsi a celle tutte abbassate di un posto: A1 viene trasformata in A2, C2 in C3, …, cioè =A1-D1-C2+D2 viene trasformata in =A2-D2-C3+D3. Nello stesso modo possiamo trovare automaticamente le espressioni che rappresentano gli abbandoni negli anni successivi.

Se davanti a una "coordinata" metto **$**, essa non viene variata durante la riproduzione. Ad es. se in B7 e C7 metto, rispettivamente, il numero dei maschi iscritti in 1ª nel 2006/07 e quello delle femmine iscritte, e in B8 metto la formula =B7/$A1*100, viene calcolata e associata a B8 la percentuale degli iscritti maschi. Se seleziono e ricopio B8 in C8 viene registrata in D8 la formula =C7/$A1*100, che rappresenta la percetuale delle femmine. Se non avessi "$" davanti ad A1 ricopiando in C8 avrei invece ottenuto =C7/B1*100, che non avrebbe rappresentato la percentuale delle femmine.

Con una formula di assegnazione si possono effettuare calcoli riferiti anche a ***insiemi di celle***. Ad esempio se volessi calcolare il totale degli iscritti nelle 5 classi della scuola, potrei mettere in una qualunque cella libera, ad esempio in A6, la formula di assegnazione =Sum(A1:A5). Infatti Sum(A1:A5) ha come valore la somma dei valori associati alle celle che stanno nel rettangolo di celle che va da A1 ad A5. Nel calcolo vengono saltate le celle del rettangolo che sono vuote (in alcuni fogli invece di "Sum" occorre impiegare un nome differente).

3. I programmi per il calcolo simbolico

Vi sono applicazioni dedicate ad attività di tipo matematico che, tra i loro sottoprogrammi, ne hanno alcuni destinati alla effettuazione di ***calcoli simbolici***. Qui accenniamo a una di esse di uso particolarmente semplice: ***Derive*** (versione per Windows). Vediamo, ad esempio, come scrivere e trasformare $A = \pi r^2$.

Se scelgo *Espressione* dal menu *Crea/Author* o se "clicco" l'icona ("matita") ho la possibilità di scrivere (essere "autore" di) un'espressione. Nella finestra di dialogo che appare batto l'espressione seguente (e infine premo ↵): **`A=pir^2`**

pi viene usato per indicare *pi greca*. Non serve battere il segno di moltiplicazione: Derive, normalmente, usa come variabili singole lettere e quindi "comprende" che **r** è una nuova variabile (**pi** non viene interpretato come **p*i** in quanto **pi** è una parola "riservata", come **GOTO** in molti linguaggi di programmazione). Nella parte superiore dello schermo appare:

#1: $a = \pi \cdot r^2$

Il simbolo "#" in matematica viene spesso usato al posto della parola "numero"; qui indica: "espressione numero 1". La variabile A viene visualizzata in minuscolo in quanto Derive, normalmente, scrive tutte le variabili in minuscolo, senza tener conto delle dimensioni impiegate dall'utente.

Se dal menu scelgo *Dichiara* posso modificare queste convenzioni linguistiche di Derive: scelgo *Stato Algebra - Inserimento* nei successivi (sotto)menu e nella finestra di dialogo che compare successivamente modifico le opzioni (qui rappresentate con sottolineature):

NomeVariabile: Carattere Parola *Maiuscole/Minuscole:* Sensibile NonSensibile

Seleziono *Parola* (invece di *Carattere*) e *Sensibile* (invece di *NonSensibile*). Compaiono:

```
#2:  CaseMode := Sensitive
#3:  InputMode := Word
```

Se poi, riscelto *Crea*, batto esattamente ciò che avevo battuto prima, ottengo:

#4: $A = pir^2$

Derive nella riga 4 ha interpretato **pir** come un'unica variabile e ha lasciato A in maiuscolo. Affinché Derive, con le opzioni scelte, interpreti il secondo termine dell'equazione come πr^2 occorre che questo venga battuto in una delle seguenti forme: **pi r^2**, **pi*r^2**, **(pi)r^2**, …. Invece di **pi** si può anche battere *Ctrl+P* (che in Derive equivale alla lettera greca π); in alternativa si può cliccare sul simbolo π che compare nella finestra di dialogo di *Crea*.

Se si clicca su **#1** appare evidenziata la relativa formula. Per spostarsi da una riga all'altra si possono usare anche i tasti-freccia ↓ e ↑. Queste e le altre frecce direzionali, azionate tenendo premuto il tasto *Shift* (*Maiusc*), consentono anche di evidenziare i vari ***sottotermini*** che costituiscono un termine o una formula:

- la freccia ↓ passa ai sottotermini "immediati" dell'espressione evidenziata,
- le frecce → e ← permettono di passare da un sottotermine immediato di un'espressione a un altro sottotermine immediato della stessa espressione,
- la freccia ↑ permette di passare dall'espressione evidenziata all'espressione di cui essa è sottotermine immediato.

2 Con Derive è possibile in bc^2+d evidenziare bc? e c^2+d? e bc^2? [motiva la risposta]

È importante padroneggiare la ***struttura*** di un termine o di una formula, non solo per svolgere a mano trasformazioni algebriche, ma anche per usare i programmi di calcolo simbolico: con Derive, è possibile costruire nuove espressioni utilizzando sottotermini di espressioni già costruite, è possibile comandare l'esecuzione di una trasformazione algebrica solo su un sottotermine invece che sull'intera espressione, ….

Così come per i linguaggi di programmazione, anche Derive e gli altri programmmi di calcolo simbolico sono caratterizzati da una distinzione tra regole di scrittura (aspetto ***sintattico***: come scrivere espressioni corrette) e regole di interpretazione (aspetto ***semantico***: quale significato dare a queste espressioni). Ad es., se scrivo l'espressione 0/0 non viene segnalato alcun errore: si tratta di un termine sintatticamente corretto. Se aziono il comando *Semplifica* Derive cerca di eseguire la divisione e ottengo la visualizzazione di "**?**": in questo modo Derive indica che si tratta di un termine indefinito.

Vediamo un esempio di manipolazione simbolica: come invertire $A=\pi r^2$ per ricavare r in funzione di A. Evidenzio #1. Scelgo *Algebricamente* dal menu *Risolvi*. Appare una finestra di dialogo con visualizzata l'equazione "#1". In alternativa avrei potuto battere direttamente l'equazione nella finestra di dialogo. In un opportuno riquadro devo selezionare la variabile rispetto alla quale voglio risolvere l'equazione, cioè r. Se clicco su "OK" appare:

#5: SOLVE($a = \pi \cdot r^2$, r)

Se poi aziono *Semplifica - Base* ottengo la coppia di formule:

#6: $[r = \sqrt{a}/\sqrt{\pi},\ r = -\ \sqrt{a}/\sqrt{\pi}]$

Queste si sarebbero potute ottenere direttamente se nella finestra di dialogo di *Risolvi* si fosse cliccato su "Semplifica" invece che su "OK" (nel caso in questione, se A è l'area del cerchio di raggio *r*, la soluzione **r = - …** non è significativa: r, in quanto misura di una lunghezza, non può essere un numero negativo).

Avrei potuto trasformare la formula in modo meno automatico, indicando ***passo passo*** le funzioni da applicare ai due membri della equazione: avrei potuto scrivere l'espressione **#1/π**, ottenendo la visualizzazione della riga #2 sotto riprodotta, che indica l'applicazione di "/π" ai due mebri dell'equazione #1; con il comando *Semplifica* si ottiene #3, cioè l'esecuzione della applicazione; a questo punto si applica la radice ai due membri, scrivendo l'espressione **√#3** (selezionando il simbolo √ con il mouse o scrivendo "sqrt" al suo posto); si ottiene #4; con *Semplifica* si ottiene #5, che equivale al risultato ottenuto prima (la riga #6 vista in precedenza).

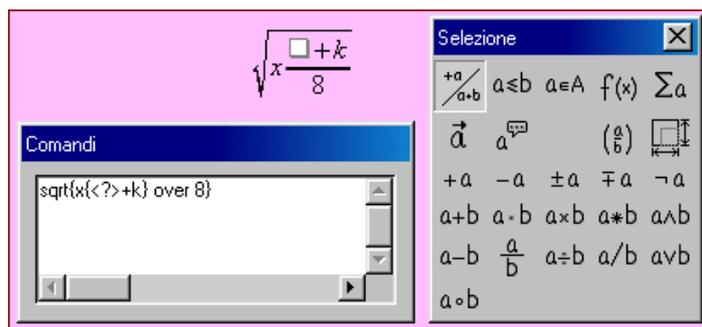
#1: $a = \pi \cdot r^2$

#2: $\dfrac{a = \pi \cdot r^2}{\pi}$

#3: $\dfrac{a}{\pi} = r^2$

#4: $\sqrt{\left(\dfrac{a}{\pi} = r^2 \right)}$

#5: $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}} = |r|$

Esistono anche ***applicazioni per scrivere espressioni matematiche***, che non consentono però di effettuare calcoli simbolici. La figura seguente riproduce una fase della costruzione di una formula mediante il sottoprogramma per costruire formule di cui è dotato *OpenOffice* (un ambiente software d'uso gratuito che include numerose applicazioni per elaborare testi, immagini, dati, …). Anche con queste applicazioni per scrivere una formula occorre padroneggiarne la struttura.

4. *Perché usare la CT, perché usare programmi per il calcolo simbolico*

Con le ***CT*** si possono svolgere le 4 operazioni e calcoli più complessi in frazioni di secondo, mentre a mano per gli stessi calcoli si impiegherebbe molto più tempo e sarebbe facile commettere piccoli errori di distrazione (dimenticare uno zero o un riporto, scrivere o leggere male una cifra, interpretare male un incolonnamento, …) e ottenere risultati molto diversi da quelli corretti. Ormai da molti decenni, la capacità di eseguire a mano velocemente complicati calcoli aritmetici non è più considerata una ***abilità intellettuale*** particolarmente significativa: richiede solo un po' di addestramento a svolgere alcune attività di tipo meccanico, che non a caso sono alla portata di dispositivi molto elementari, poco più complessi di un contagiri.

Fino a circa mezzo secolo fa per certi calcoli (ad esempio per le radici quadrate e per gli elevamenti a potenza) si usavano delle tavole numeriche che elencavano una grande quantità di input e i relativi output. Fino a qualche anno fa, in molti libri scolastici sono sopravvissute tavole simili, per calcoli di questo tipo o per altri calcoli che affronteremo più avanti (funzioni trigonometriche, logaritmi, funzioni di tipo probabilistico, …) e alcuni insegnanti vietavano l'uso delle CT in classe: la ***scuola*** a volte recepisce in ritardo i cambiamenti nella cultura e nelle professioni.

Ciò che è ***importante*** culturalmente e operativamente, per usare correttamente e consapevolmente le CT, è:

- capire, di fronte a una situazione problematica, *quali calcoli* occorre svolgere per risolverla (è inutile saper fare velocemente divisioni e moltiplicazioni se non si sa come affrontare il calcolo di una percentuale);

- saper stimare l'*ordine di grandezza* ed eventualmente qualche cifra significativa del risultato, sia attraverso calcoli approssimati, sia facendo considerazioni legate alla situazione (se dobbiamo determinare l'altezza di un palazzo ci aspettiamo che il risultato sia di poche decine di metri, nel caso dello spessore di un foglio di carta ci aspettiamo una misura vicina al decimo di millimetro); ciò serve sia a fare valutazioni nei casi in cui si devono compiere delle scelte in tempi rapidi, sia a controllare le uscite della CT (un tasto mal premuto può dar luogo a risultati errati);
- conoscere le *possibilità* e i *limiti* della *CT* in modo da impostare correttamente i calcoli e da interpretarne le uscite.

Possiamo fare considerazioni analoghe per i ***programmi per il calcolo simbolico***: svolgono in frazioni di secondo calcoli che a mano richiederebbero molto più tempo e che sarebbe facile sbagliare per errori di distrazione. E in genere, come abbiamo già osservato, sono integrati in programmi più generali che consentono anche di fare grafici ed elaborazioni numeriche, permettendoci di combinare varie tecniche risolutive (e di controllare meglio ciò che stiamo facendo.

Fino a qualche anno fa era importante che un matematico o un fisico (e, in parte, un ingegnere) avesse un buon allenamento nello svolgere calcoli di tipo simbolico, anche se, a dire il vero, nella sua attività non avrebbe *mai* incontrato i calcoli "complessi" che venivano proposti come esercizi in molti libri di scuola:
un matematico e un fisico si trova spesso di fronte a formule che è difficile trasformare perché vi entrano in gioco funzioni particolari, più "strane" delle radici quadrate e degli elevamenti a potenza, non perché siano formule lunghe, a numerosi "piani", con tante lettere combinate in modi intricati, come accade negli esercizi di cui abbiamo parlato.

L'impiego delle applicazioni per il calcolo simbolico ha diminuito ulteriormente l'importanza di questo allenamento. A maggior ragione, fra qualche anno (quando i mezzi di calcolo saranno ancora più diffusi e di più piccole dimensioni) i pochi che *nella vita* si troveranno ad avere a che fare con calcoli simbolici di una certa complessità, non avranno da affrontarli a mano: le parti più meccaniche le demanderanno a un computer. Sarà invece ***importante*** che essi sappiano:
- descrivere situazioni mediante *opportune formule*;
- leggere un termine o una formula (la sua *articolazione in sottotermini*, …), conoscere le *nozioni di base del calcolo simbolico* (scegliere le regole di riscrittura da applicare, trovare le funzioni inverse e tener conto dei loro insiemi di definizione, …); queste abilità sono utili sia per lo svolgimento dei semplici calcoli simbolici che ricorrono frequentemente nelle attività scientifiche, sia per scegliere comandi, sottotermini, … usando un programma di calcolo simbolico per scrivere e elaborare una certa espressione;
- conoscere le modalità d'uso e il *funzionamento dell'applicazione* per il calcolo simbolico impiegata;
- e, comunque, essere consapevole che con altre applicazioni possono cambiare le *convenzioni*, i nomi usabili come variabili, i simboli e i modi in cui indicare le costanti e le funzioni, …

Questi sono i motivi per cui in tutto il mondo nella scuola viene dato molto meno "peso" all'*addestramento* al "calcolo letterale". Del resto chi proseguirà gli studi in facoltà scientifiche raramente avrà a che fare con calcoli simbolici complessi. In genere gli studenti che nella scuola superiore hanno avuto un insegnamento della matematica che ha investito più tempo in attività di questo genere a scapito di attività meno "meccaniche" sono quelli che, negli ***studi universitari***, incontrano maggiori difficoltà.

5. I programmi di geometria dinamica

Esiste software, come Poligon e Derive, con cui si possono descrivere figure da tracciare dandone una descrizione algebrica, come punti, sotto forma di equazione o indicando le coordinate di alcuni punti che consentono di ricostruirle. Ad esempio in *Poligon* il cerchio raffigurato a lato, di centro (3,1) e passante per (5,1), può essere fatto tracciare col comando C(3,1,5,1). Esiste software che consente il tracciamento di figure con il mouse e di avere, contemporaneamente, una loro descrizione algebrica.

Ecco, sotto, il tracciamento dello stesso cerchio realizzato col software libero ***GeoGebra*** (a cui puoi accedere da **qui**), realizzato cliccando l'icona che corrisponde al tracciamento di un cerchio a partire dal suo centro e un suo punto e, quindi, cliccando centro e punto. Oltre alla figura, ne ottieni anche una descrizione algebrica. Se vuoi, puoi poi modificare la figura trascinandone col mouse (col pulsante destro schiacciato) uno dei due punti che la identificano.

Applicazioni di questo tipo vengono chiamate di ***geometria dinamica***. Tra gli esercizi troverai alcune attività che ti consentiranno di esercitarti al loro uso.

6. Esercizi

e1 Prova a calcolare e descrivere lo stato del foglio elettronico passando dallo stato "visione formule" allo stato "visione valori" nel caso illustrato a fianco.

	A	B
1	1	=A1
2	=B2+1	=B1
3	=A2/10	=A1+A3

formule

	A	B
1	1	
2		
3		

valori

e2 Se davanti ad una "coordinata" metto $, essa non viene variata durante la riproduzione. Nel caso a fianco, se in F1 ho =$A5+C$2 e riproduco la formula in H4 che cosa ottengo?

	F	G	H
1	=$A5+C$2		
2			
3			
4			? ?

e3 Se in (2.1) metto in B8 la formula =B1/A1*100 viene calcolata e associata a B8 la percentuale dei ripetenti sugli iscritti alla prima nel 2006/07 (81/181·100). Se seleziono e ricopio B8 in D8 quale formula viene effettivamente registrata in D8? Che cosa rappresenta?

e4 Con una formula di assegnazione si possono effettuare calcoli riferiti a ***insiemi di celle***. Ad es. se voglio calcolare il totale degli iscritti nelle 5 classi di cui alla talella (2.1) posso mettere in una cella libera, come A6, la formula =Sum(A1:A5), che ha come valore la somma dei valori associati alle celle che stanno nel rettangoli di celle che va da A1 ad A5 (nel calcolo vengono saltate le celle che sono vuote).

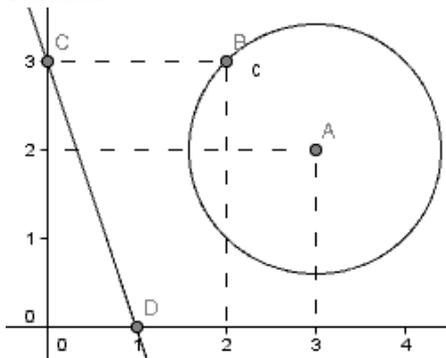
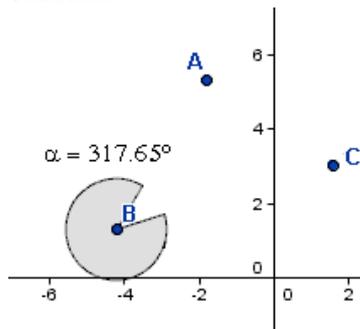
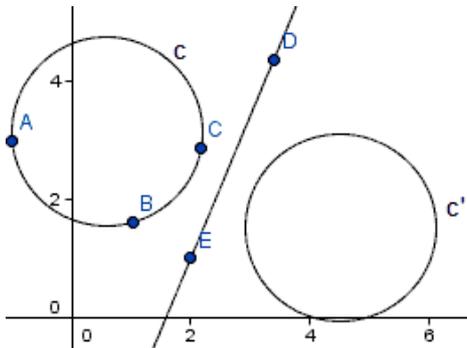
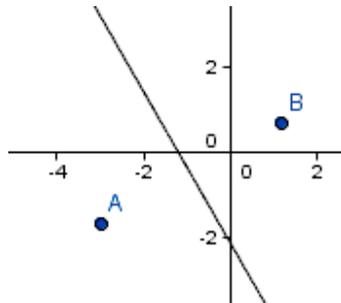
		a.s. 2006/07 totale iscritti	ripetenti	a.s. 2007/08 totale iscritti	ripetenti	
		A	B	C	D	E
classe 1ª	1	181	81	154	36	
			…	…	…	
classe 5ª	5	234		232		
	6	=Sum(A1:A5)		=Sum(C1:C5)		

Se riempio C6 nel modo sopra illustrato e ne copio il contenuto in D6 che cosa vi appare? Quale formula devo mettere in E6 per ottenere la percentuale dei ripetenti tra gli iscritti nel 2007/08?

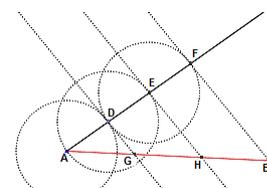
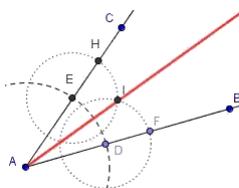
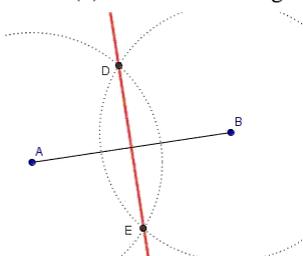
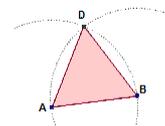
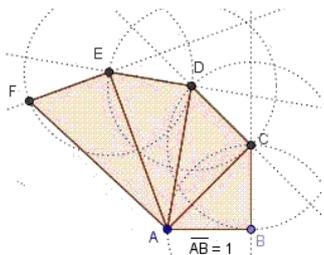
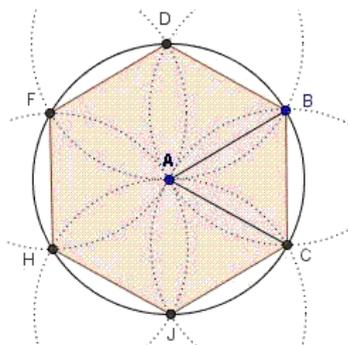
E quale formula devo mettere in E1 per ottenere la percentuale degli iscritti alla prima (nel 2007/08)? Come devo scrivere questa formula in modo che riproducendola in E2 si ottenga la percentuale degli iscritti alla seconda?

e5 Prova ad eseguire e ad esaminare i seguenti script e ad individuarne gli eventuali **errori** (*):
uno due tre quattro cinque sei.

(*) Se usi Mozilla, gli errori sono visualizzati nella Console degli Errori accessibile dal menu Strumenti (cancella gli eventuali errori di script precedenti); se usi Internet Explorer e non compaiono messaggi di errore controlla nel menu Strumenti alla voce Opzioni Internet - Avanzate che non siano selezionate le voci Disattiva Debbugging degli Script e che sia selezionata la voce Visualizza gli Errori di Script

e6 Prova a realizzare con GeoGebra la figura seguente e descrivi come hai operato per ottenerla.

e7 Prova a realizzare con GeoGebra la figura seguente e descrivi come hai operato per ottenerla.

e8 Prova a realizzare con GeoGebra la figura seguente e descrivi come hai operato per ottenerla.

e9 Prova a realizzare con GeoGebra la figura seguente e descrivi come hai operato per ottenerla.

e10 Usando Derive o un'altra applicazione che consente di svolgere calcoli simbolici, prova a scrivere i seguenti termini e la seguente equazione. Poi, con la stessa applicazione, prova a risolvere l'equazione rispetto a b2.

$\frac{x+y}{z+wa}$ $\frac{x+y}{z+w}a$ a^{x+y} a^x+y a^{-2} $\text{Area} = \frac{(b1+b2)h}{2}$

e11 Le figure seguenti dovrebbero ricordarti alcune costruzioni realizzabili con riga e compasso (cliccale per ingrandirle). Le elenchiamo, in ordine sparso: asse di un segmento, triangolo equilatero, divisione di un segmento in tre parti uguali, bisettrice di un angolo. Per ciascuna costruzione (1) associa ad essa la relativa immagine, (2) spiega con tue parole come la si effettua, e (3) perché funziona. Quindi (4) realizza con Geogebra le quattro costruzioni.

e12 La figura a lato dovrebbero ricordarti una costruzione realizzabile con riga e compasso (cliccala per ingrandirla). (1) spiega con tue parole come la si effettua; (2) realizzala con Geogebra; (3) la costruzione suggerisce una semplice relazione tra perimetro dell'esagono regolare e il raggio della circonferenza in cui esso è inscritto; quale? (4) qual è il perimetro di un esagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio lungo 10 cm? possiamo dire qualcosa sulla lunghezza della circonferenza?

e13 La figura a lato mostra una successione di triangoli rettangoli (cliccala per ingrandirla). Tutti hanno un vertice in A. Gli angoli retti sono quelli di vertici B, C, D, … Le circonferenze hanno tutte raggio 1. (1) Quanto sono lunghe le ipotenuse AC, AD, AE, …? (2) Come posso costruire un segmento lungo esattamente $\sqrt{7}$? (3) Costruisci la figura con Geogebra.

1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini:

file (§1), *variabili di un foglio elettronico* (§2), *geometria dinamica* (§5).

2) Su un foglio da "quadernone", nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").

I numeri

Le strutture numeriche e i loro usi

Scheda 1

Usi dei numeri

1. Che cos'è un numero?

Consideriamo la definizione che ne dà un diffusissimo vocabolario della lingua italiana:

(**Def. 1**) *ente matematico che caratterizza un insieme di cose o di persone*

1 Le bilie hanno la caratteristica di avere la forma di una sfera. Qual è l'ente matematico che caratterizza l'insieme delle bilie? E` un numero?

(Def.1) non è certo soddisfacente. Forse gli autori del vocabolario avrebbero voluto intendere:

(**Def. 2**) *ente matematico usato per indicare una quantità (di cose o di persone)*

2 Considera le frasi seguenti. Ti sembra che l'uso di numeri fatto in esse sia in ogni caso in accordo con la definizione tentata sopra? Per quali motivi?

(**1.1**) Sei alto 178 cm.
(**1.2**) Ho preso 6 di inglese.
(**1.3**) Ieri eravamo a 3 gradi, oggi è più freddo, siamo a -2 gradi.
(**1.4**) Ci sono prima io, lei ha il numero 27, io il 25.

E` sicuramente migliore la seguente definizione, tradotta da un noto vocabolario della lingua inglese:

(**Def. 3**) *un elemento del sistema di simboli usato per contare e per rappresentare misure*

Nei casi (1.1)-(1.3) i numeri vengono impiegati per rappresentare *misure*, anche se nel caso dei voti non si tratta di misure in senso stretto: non è chiaro che cosa si misuri (la bravura di un alunno o il suo comportamento durante una prova di verifica, che può essere condizionato da fattori emotivi, dagli argomenti specifici dei quesiti, …) e in che modo venga effettuata la misura (una interrogazione, una prova scritta, … possono essere valutate diversamente da insegnanti diversi o dallo stesso insegnante in giornate diverse).

Nel caso delle grandezze fisiche la misurazione consiste in un procedimento per associare numeri a grandezze, ma non è detto che questi numeri rappresentino sempre delle quantità: mentre 0 cm può indicare un oggetto di altezza nulla e un oggetto di 20 kg pesa il doppio di un oggetto di 10 kg, la temperatura di 0° non indica un'assenza di calore (si può infatti scendere sotto a 0°) e non ha senso dire che le ore 20 sono il doppio delle 10.

Nel caso (1.4) il numero viene usato per tener conto dell'*ordine di arrivo* degli utenti ad uno sportello di informazioni, in un ufficio o in un negozio usualmente molto affollati. Non è detto che misuri la quantità delle persone arrivate: due persone possono essere venute insieme (per chiedere la stessa informazione o fare lo stesso acquisto) e aver preso un solo biglietto; una persona può avere strappato per sbaglio due biglietti; in genere quando si arriva al biglietto numero 99 si riparte con un nuovo blocchetto di biglietti; …

(Def.3) è più precisa di (Def.2): non si parla di una generica indicazione di quantità di oggetti ma si parla di *conta* e di *misurazione*. Inoltre, descrivendo i numeri come le espressioni usate per contare e misurare, non si esclude che queste espressioni siano usate anche per altri scopi.

3 Considera le frasi seguenti. Anche in questi casi i numeri sono usati per misurare, per tener conto di un ordine di arrivo o per indicare una posizione in qualche altro tipo di elencazione?

(**1.5**) Versa i soldi nella Banca Carige, sul conto n° 38155/80.
(**1.6**) Il mio numero di codice fiscale è DPT NMR 50D57 D969V.
(**1.7**) Telefonami al numero 010 210407.
(**1.8**) Le abbiamo riservato la camera 507, al 5° piano.

In (1.5) è stato usato "/" per separare i due numeri 38155 e 80; 38155 è il numero del conto in senso stretto, 80 è un numero che ne specifica il tipo. A volte si trova scritto equivalentemente 3815580. 38155/80 non è dunque un numero come quelli usati comunemente in matematica, ma, piuttosto, indica una coppia di numeri.

Nel caso (1.6) siamo di fronte a un "numero" ancora più strano. Vediamo che cosa rappresenta DPT NMR 50D57 D969V:
DePeTris aNnaMaRia, femmina (57>40), nata il 17 (57-40) / 4 (D è la 4ª lettera dell'alfabeto) / 50 nel comune di Genova (D969).

Il numero di codice fiscale del fratello Calogero è invece DPT CGR 53M07 D969Q (egli è nato il 7 agosto 1953; per i maschi il giorno di nascita viene indicato senza aggiungere 40).

4 Quali sono il sesso e la data di nascita di M.Rovati se il suo numero di codice fiscale inizia con RVTMRA60L60?

Nel caso (**1.5**) eravamo di fronte a una espressione (38155/80) che aveva lo scopo di identificare una particolare cosa (un conto corrente bancario). (**1.6**) non ha invece solo lo scopo di identificare una persona (come potrebbe essere il numero associato ad un alunno nel registro di classe), ma ha anche quello di rappresentare alcune informazioni su di essa. Infatti il codice fiscale è un codice che traduce in una sequenza di 16 simboli (lettere o cifre) tutta una serie di informazioni.

010 210407 in (**1.7**) rappresenta un punto terminale della rete telefonica di un certo distretto telefonico, ad es. il tratto di linea a cui sono collegati gli apparecchi telefonici di un particolare appartamento di una data città. È un numero che non ha alcun significato quantitativo (del resto non è letto come 10 milioni 210 mila 407). Alcune cifre possono invece indicare alcuni riferimenti geografici della zona dell'appartamento in cui arriva la linea telefonica.

Nel caso (**1.8**) il numero 507 indica una particolare camera dell'albergo. Negli alberghi (e, in genere, nelle ditte e negli enti che hanno uffici disposti su più piani) la numerazione delle stanze ha questo significato: stanza 507 = 7ª stanza del 5° piano.

Infine, gli usi della parola *numero* fatti in (1.5) e in (1.6) sono sicuramente legittimi nel linguaggio comune. Tuttavia facendo matematica non ci sogneremmo mai di considerare DPT NMR 50D57 D969V un numero e se volessimo considerare 38155/80 un numero interpreteremmo il simbolo "/" come segno della divisione, cioè intenderemmo 38155/80 come termine numerico che vale 476.9375. In altre parole DPT NMR 50D57 D969V e 38155/80 sono espressioni che non fanno parte del sistema di simboli impiegato per contare e rappresentare misure.

La definizione (Def.3) è dunque un po' restrittiva rispetto al linguaggio comune. Rispetto alla matematica è invece un po' vaga. Infatti non spiega al lettore del vocabolario come è fatto questo sistema di simboli. Proviamo a precisare noi questa descrizione.

È un ***numero intero*** ogni espressione costituita da una sequenza finita di cifre eventualmente preceduta dal segno "–". Cioè è un'espressione ottenuta *arrestando* in un qualsiasi momento il procedimento (1.9), avendo eseguito almeno una volta il passo (2)

(**1.9**)
(1) se vuoi scrivi "-"
(2) scrivi una cifra
(3) vai a (2)

Più in generale è un ***numero*** ogni espressione costituita da un numero intero eventualmente seguito dal segno "." e da una sequenza di cifre finita (*numero limitato*) o senza fine (*numero illimitato*). Esempi: 12 12.0512 12.34343434… -7 -7.17385261402… -0.01

(**1.10**)
(1) scrivi un numero intero
(2) scrivi "."
(3) scrivi una cifra
(4) vai a (3)

In altre parole è un numero ogni espressione che può essere generata con il procedimento (1.10) a lato, sia che lo si arresti, avendo eseguito almeno il passo (1), sia che non lo si arresti. Per precisare che si sta trattando di un numero generico e non di un numero intero o limitato si usa l'espressione ***numero reale***. Su questa parola torneremo tra poco.

5 Scrivi un po' di cifre del numero reale generabile con il procedimento *meccanico* descritto a lato, cioè in cui è stato determinato il modo in cui devono essere prese le cifre:

(1) scrivi "27."
(2) scrivi "04"
(3) vai a (2)

6 Descrivi un procedimento meccanico per gererare il numero reale 2.666… (e così via con altri 6).

7 Descrivi un procedimento meccanico per gererare il numero che è il risultato di 1/22.

I *numeri interi* traggono il loro nome dal fatto che vengono usualmente impiegati per indicare quantità di oggetti non frazionabili. Ad esempio una popolazione può essere di 152 518 abitanti, non di 152518.5 abitanti, cioè di 152518 abitanti e mezzo.

Naturalmente usando unità di misura maggiori dell'*abitante* si può ricorrere anche a numeri non interi; ad esempio la popolazione precedente potrebbe essere espressa come 152.518 *migliaia di abitanti*. Se poi, ad esempio, si considera la popolazione media di un comune di una certa provincia, si può ottenere un numero non intero: se gli abitanti della provincia sono 945 387 e i comuni sono 612, la popolazione media di un comune è di 945387/612 = 1544.75 abitanti.

Il termine ***numeri reali*** è invece un modo diverso in cui vengono indicati gli oggetti matematici di solito chiamati semplicemente *numeri.* Dietro all'uso di questa denominazione più estesa vi è il fatto che esistono degli oggetti matematici più generali che vengono chiamati *numeri complessi,* di cui farai la conoscenza più avanti nel corso degli studi. Quando si vogliono evitare confusioni si aggiunge la specificazione "reali". Noi, che per il momento non avremo a che fare con i numeri complessi, in genere ometteremo l'aggiunta dell'aggettivo "reali".

Comunque possiamo osservare che è stato scelto l'aggettivo "reali" perché questi numeri sono quelli impiegati per rappresentare misure fisiche ed economiche.

2. Numeri uguali

Ecco alcuni altri esempi di uso dei numeri.

(**2.1**) I genovesi posero questa lapide nell'anno MCMVI a ricordo …
(**2.2**) Sono già le 7:30.
(**2.3**) Come risultato di 10 [x^y] 18 [=] si ottiene 1E18.

8 Questi esempi corrispondono alla definizione di numero a cui siamo arrivati nel paragrafo precedente (espressione opportunamente costruita con cifre e un eventuale "-" e un eventuale ".")? III, 7:30, 1E18 sono numeri?

Nel caso della notazione esponenziale impiegata dai mezzi di calcolo - es. (2.3) - siamo di fronte ad espressioni impiegate per rappresentare in forma abbreviata un numero usualmente scritto usando solo cifre. Anche nel caso (2.1) siamo semplicemente di fronte a una diversa scrittura del numero 1906.

In (2.2) si è impiegato il simbolo ":" per delimitare la parte che indica la quantità di ore dalla parte che indica la quantità di minuti, cioè riferita a un'unità di misura (60 volte) più piccola.

Analogamente a volte per indicare l'estensione di terreni (ad esempio sui certificati catastali) si usano scritture come 6;05;17 *ha* (ettari) per intendere un'area di 6 *ha*, 5 *a* (are) e 17 *ca* (centiare): qui il ";" delimita la parte che indica la quantità in una unità di misura da quella che la indica in una unità di misura (100 volte) più piccola.

9 Esprimi la durata di 7 h 30 min e l'area 36;05;17 *ha* con l'usuale scrittura decimale (solo cifre e punto).

7 h 30 min = … h 36;05;17 ha = … ha

(2.1)-(2.3) sono tutti esempi di scritture riconducibili meccanicamente, attraverso una decodifica, a espressioni che concordano con la definizione che abbiamo dato. Diremo quindi che ad es. CC, 200 e 2E2 sono tre modi diversi per indicare lo stesso numero. Assumeremo comunque 200 come notazione *standard* di esso. Analogamente a volte si scrive 01, 02, … o 001, 002, … invece di 1, 2, … . A volte si trova scritto pure .37 invece di 0.37. Anche in questi casi si tratta di diverse rappresentazioni di uno stesso numero. Così a volte lo stesso numero viene indicato con 7.3, 7.30, 7.300, … . Siamo di fronte a espressioni che pur essendo *diverse come sequenze di simboli* sono ***uguali come numeri***.

In altre parole per caratterizzare il concetto di numero non possiamo limitarci a dire "sequenza di cifre …" ma dobbiamo anche precisare quando due di queste sequenze sono da considerare *uguali come numeri.*

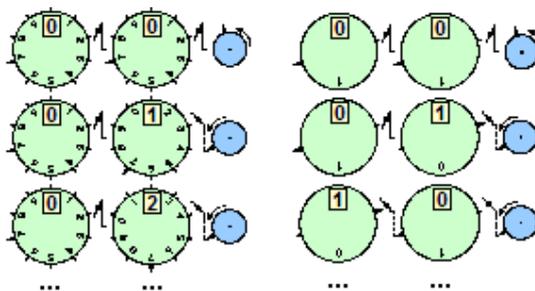
10 Due quadrati con lato di 15 cm tracciati su una lavagna con gessi di colore diverso, ad esempio verde e bianco, sono due figure indubbiamente differenti: una è verde e l'altra è bianca. Possiamo dire che sono due *figure geometriche* uguali? Trovi qualche analogia tra questa situazione e, ad esempio, il caso dell'eguaglianza di 0.750 e .75.

I numeri possono essere rappresentati in molti altri modi. Ad esempio in codice Morse e in codice BCD, sostituendo una ad una le cifre di un numero scritto in notazione decimale con altri simboli (nel primo caso con una particolare sequenza di punti e di linee, nel secondo caso con un gruppo di 4 bit). Ovvero *usando i procedimenti (1.9) e (1.10) con sistemi di cifre diversi dall'usuale:*

- se uso come cifre 0 e 1 posso ottenere ad esempio: 0, 1000.01, -1.1010, 1111, …
- se uso come cifre 0, 1 e 2 ottengo ad esempio: 2, -212, 0, 10.201, …
- se uso come cifre 0, 1, 2, …, 9, A, B, C, D, E e F ottengo ad esempio: 1A.B, F.A, 0, -1.0B, …

Il problema è precisare quando due numeri scritti usando diversi sistemi di cifre sono da considerare uguali. La questione è semplice per quanto riguarda i numeri interi.

I numeri interi positivi vengono impiegati come modello matematico per contare: ogni volta che si passa da un oggetto a un altro (nel caso si stia contando una quantità di oggetti) o da un evento al successivo (nel caso si stia scandendo una successione di eventi: scorrere dei giorni, ordine di arrivo in una gara, movimenti in un passo di danza, …), si scatta da un numero intero al numero intero successivo.

I numeri si susseguono come nei contatori. Nella figura a lato è ricordato il funzionamento di un contagiri decimale (cifre: 0,1, …, 9) e di un contagiri binario (cifre: 0,1).

Per passare da una rappresentazione con il sistema a ***c*** cifre alla rappresentazione decimale si fa una somma di potenze di base ***c***. Ad esempio la scrittra in forma binaria 110 corrisponde a $1·2^2+1·2^1+0·2^0$ = $1·4+1·2+0·1$ = 6. La scittura in base 60 del tempo (arrotondato ai secondi) 13:05 corrisponde a $13·60^1+5·60^0 = 13·60+5·1 = 785$ (secondi).

Per questi motivi la rappresentazione con il sistema a ***c*** cifre viene chiamata ***rappresentazione in base c.*** Per indicare le basi di rappresentazione dei numeri precedenti si usa indicare la base di rappresentazione come "pedice" e per le basi di numerazione superiori a 10 in genere si usano A, B, C, … per indicare le cifre "dieci", "undici", "dodici", …. Nei due casi precedenti (110 in base 2 e 13:05 in base 60) si usano scritture come le seguenti: $(110)_2$ e $(D5)_{60}$.

3. Le strutture numeriche

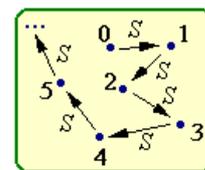
Abbiamo visto che a volte i numeri vengono usati semplicemente come stringhe, cioè come sequenze di caratteri, per identificare oggetti (ad esempio un apparecchio telefonico). In matematica invece i numeri non sono solamente delle sequenze di caratteri. Anzi, abbiamo visto che a un numero non è associata un'unica rappresentazione simbolica: esistono rappresentazioni simboliche diverse che vengono considerate uguali come numeri. Per adesso abbiamo approfondito questo aspetto relativamente ai numeri interi, successivamente lo affronteremo più in generale per tutti i numeri reali.

11 Il riquadro a lato raffigura un impiego di Poligon (o di un altro qualunque programma di tipo matematico) per calcolare in corrispondenza di alcuni valori di input i valori di output della funzione x → x. In tutti i casi considerati si è ottenuto sempre "70". Spiega questo comportamento del programma.

```
F(x)=x
F(70)=70
F(070.00)=70
F(7E1)=70
```

La matematica si interessa degli usi dei numeri non come semplici "nomi" ma come elementi impiegati per costruire modelli matematici (percentuali, medie, equazioni, funzioni, grafici, …) che consentano di rappresentare e studiare le relazioni che intercorrono tra grandezze e fenomeni di vario genere.

A differenza del caso dei numeri telefonici (in cui non ha alcun senso stabilire se un numero telefonico precede o segue un altro o, ad es., calcolare la somma di due numeri telefonici), per mettere a punto un modello matematico non ci basta sapere come devono essere scritti i numeri, ma dobbiamo anche definire dei modi opportuni per confrontare e operare sui numeri. Cioè non possiamo considerare i numeri come una semplice collezione di oggetti, ma abbiamo bisogno di organizzarli, di dare ad essi una "struttura".

Ad es. abbiamo visto che i numeri interi positivi possono essere impiegati per *contare*: al succedersi di certi eventi o certe azioni *passiamo man mano da un numero al numero successivo*. Non ci basta conoscere che cosa sono i numeri interi positivi, ma dobbiamo anche sapere il modo in cui, a partire da 1, si possono generare uno dopo l'altro tutti gli altri numeri interi positivi. Se partiamo da 0, invece dei numeri interi positivi consideriamo i numeri non negativi (numeri positivi più 0), che vengono più in breve chiamati ***numeri naturali***.

In altre parole dobbiamo conoscere la funzione $n \to$ *successore* di n che dato un numero mi dice come passare al numero successivo, cioè al suo ***successore***.

Indicata con S la funzione-successore e con S(n) il successore di n, si ha: S(0)=1, S(1)=2, S(2)=3, … . Volendo si può estendere la funzione ai numeri negativi; ad esempio S(-2)=-1, S(-1)=0: salendo in ascensore, al piano -2 (2 piani sotto-terra) segue il piano -1, al piano -1 segue il piano 0 (piano-terra).

Esempio 1. Supponiamo di voler stabilire in quale tra due strade A e B passano più automobili tra le 8 e le 9 del mattino di un certo giorno. Per fare questo ci basta considerare i numeri interi positivi e la funzione-successore S. Due persone si piazzano alle ore 8 presso le due strade, partono dal numero 0 e ad ogni passaggio di macchina fanno corrispondere una applicazione di S, cioè si comportano seguendo questo schema:

(1) prendi come n il numero 0;
(**3.1**) (2) se è passata una nuova auto calcola S(n) e prendilo come nuovo n
(3) vai a (2)

Alle 9 le due persone si fermano e, confrontando i due valori nA e nB a cui sono arrivate, possono stabilire in quale delle due strade sono passate più automobili.

In questa situazione il *modello matematico* impiegato è dunque la ***struttura numerica*** costituita dall'insieme dei numeri naturali, il cui numero 0 viene assunto come ***elemento iniziale***, e dalla ***funzione-successore*** S. Non ci serve considerare altre funzioni, ad esempio la somma o il prodotto.

Esempio 2. Consideriamo la stessa situazione dell'esempio 1. Vogliamo però calcolare anche quante auto sono passate complessivamente per le strade A e B.

In questo caso dobbiamo arricchire la precedente struttura numerica considerando anche la ***funzione-somma***: $m,n \to m+n$.

Esempio 3. Esaminiamo invece la situazione (1.4) del quesito 2, e supponiamo che vengano impiegati blocchetti di biglietti numerati da 1 a 99: ogni persona in arrivo stacca il biglietto superiore del blocchetto in uso; esauriti i biglietti, viene messo in uso un nuovo blocchetto, identico al precedente.

Qui si sta impiegando una struttura numerica differente: è costituita dai numeri interi compresi tra 1 e 99 e da una funzione-successore differente da S, chiamiamola S':

S'(1)=2, S'(2)=3, … S'(98)=99, S'(99)=1.

Sulla base del solo modello matematico non è possibile stabilire tra il possessore del biglietto 93 e il possessore del biglietto 47 chi è arrivato prima. Infatti il 93 potrebbe essere stato staccato da un blocchetto precedente. Bisognerà far ricorso anche ad altre considerazioni.

12 Sei in coda per entrare in un ufficio del catasto assieme ad un'altra cinquantina di persone. Tu hai il numero 47 e vedi un'altra persona che ha il numero 93. Come potresti stabilire chi dei due è arrivato prima?

Nelle successive schede di questa unità didattica approfondiremo lo studio delle strutture numeriche.

4. Basi di numerazione

La tabella seguente illustra la scrittura dei numeri in diverse basi. Le cifre vengono ordinate alfabeticamente: 0 è la cifra iniziale, a cui seguono nell'ordine 1, 2, 3, …, 9, A, B, … . Dopo il numero 0 vengono generate in ordine alfabetico le parole non inizianti per 0 composte da un solo carattere, poi quelle composte da due caratteri, poi quelle composte da tre caratteri, e così via.

13 Provate a completare la *tabella (4.1)* e ad individuare come si trova in generale la rappresentazione decimale del numero 100…0 (n comparse della cifra 0) scritto impiegando un sistema di c cifre.

(4.1)

10 cifre	2 cifre	3 cifre	8 cifre	16 cifre
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	***10***	2	2	2
3	11	***10***	3	3
4	***100***	11	4	4
5	101	12	5	5
6	110	20	6	6
7	111	21	7	7
8	***1000***	22	***10***	8
9	1001	***100***	11	9
10	1010	101	12	A

10 cifre	2 cifre	3 cifre	8 cifre	16 cifre
11	1011	102	13	B
12	1100	110	14	C
13	1101	111	15	D
14	1110	112	16	E
15	1111	120	17	F
16	***10000***	121	20	***10***
17				
...				
27				
...				
32				

In un contagiri che usa un sistema di *10 cifre*:
- la ruota iniziale (a destra) - di *posto 0* - scatta ad ogni giro,
- la ruota che segue - di *posto 1* - scatta ogni *10 scatti* della iniziale,
- la ruota che segue - di *posto 2* - scatta ogni 10 scatti della precedente, cioè ogni 10·10=10^2 *scatti* della iniziale,
- la ruota che segue - di *posto 3* - scatta ogni 10 scatti della precedente, cioè ogni 10·10·10=10^3 *scatti* della iniziale,

...

In un contagiri che usa un sistema di *8 cifre*:
- la ruota iniziale (a destra) - di *posto 0* - scatta ad ogni giro,
- la ruota di *posto 1* scatta ogni *8 scatti* della iniziale,
- la ruota di *posto 2* scatta ogni 8·8=8^2 *scatti* della iniziale,
- la ruota di *posto 3* scatta ogni 8·8·8=8^3 *scatti* della iniziale,

...

Quindi il numero *562* scritto usando il sistema di cifre 0, 1, 2, …, 7 viene generato a partire da 0 con:
- 5 volte 8·8 incrementi unitari (scatti della ruota iniziale) in modo da far scattare 5 volte la ruota di posto 2 e arrivare a *500*,
- 6 volte 8 incrementi unitari in modo da far scattare 6 volte ruota di posto 1 e arrivare a *560*,
- 2 increneti unitari, cioè 2 scatti ruota di *posto 0*, con cui infine arriviamo a *562*.

In definitiva *562* scritto usando il sistema di 8 cifre 0, 1, 2, …, 7 corrisponde nell'usuale rappresentazione a 8^2·5+8·6+2 = 64·***5***+8·***6*** + ***2*** = 370.

14 Trova la rappresentazione decimale di 1120 e di 1012 nei casi in cui si siano impiegati sistemi a 3, 8 e 16 cifre.

	0, 1, 2 → 0, 1, …, 9	0, 1, …, 7 → 0, 1, …, 9	0, 1, …, F → 0, 1, …, 9
1120			
1012			

Ricordiamo che la rappresentazione binaria è chiamata anche rappresentazione in base due e che le altre rappresentazioni della tabella (4.1) sono chiamate in base tre, in base otto, in base sedici. La rappresentazione standard è chiamata in base dieci. Quando scriviamo un numero in genere sottointendiamo che sia scritto in base dieci, cioè nel sistema in cui 10 rappresenta "dieci". Ricordiamo che quando si usano altre basi queste vengono spesso specificate con una notazione come la seguente: $(3045)_8$ indica il numero che in base 8 è rappresentato da 3045. Vedi, nel riquadro seguente, come si può trovare la rappresentazione in base 5 di 67; quindi affronta l'esercizio:

15 Completa: $(2001)_3$ = … = $(…)_{16}$ $(1111)_2$ = … = $(…)_4$ = $(…)_8$ = $(…)_{16}$

Quanto detto per i numeri interi positivi si può estendere a tutti i numeri interi: -8 può essere scritto $(-1000)_2$ o $(-10)_8$ o $(-22)_3$ ...

	3	2	1	0	posto della cifra
• Devo mettere assieme 67 usando potenze di 5 grandi il più possible	?	?	?	?	
	125	25	5	1	potenza di 5
• 25 ≤ 67 < 125; quindi parto dalla cifra di posto 2	0	?	?	?	
• Quante volte posso prendere 25? 2, poiché 25·2 = 50 ≤ 67 < 25·3	0	2	?	?	
• Devo ancora formare 17. Quante volte prendo 5? 3 poiché 5·3 ≤ 17 < 5·4	0	2	3	?	
• Devo ancora mettere assieme 2. Quante volte posso prendere 1? 2	0	2	3	2	

Quindi $67 = (232)_5$.

5. Esercizi

e1 Con i numeri impiegati per indicare le stanze degli alberghi non ha in genere senso fare operazioni aritmetiche. Ad es. se nell'albergo sono occupate tutte le stanze fino alla stanza 410 e tutte le stanze successive alla 507 non possiamo dire che le stanze rimanenti sono 507-410=97. Perché? Possiamo tuttavia fare dei confronti e ad es. stabilire in base ai loro numeri quale tra due stanze è collocata più in alto. Come?

e2 Redigi un programma in JS (o in un altro linguaggio) che traduca il procedimento del quesito 5.

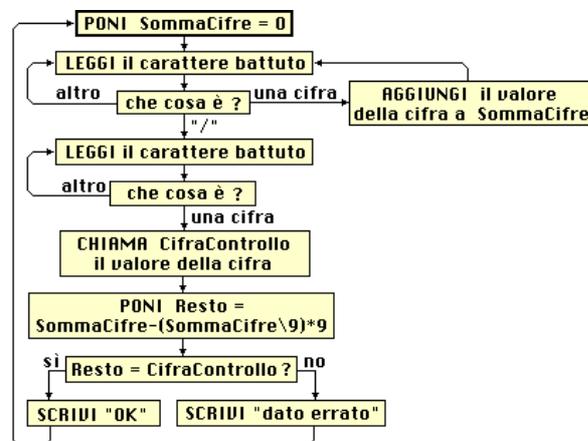
e3 Scrivi una ventina di cifre di ciascuno dei numeri descritti dai seguenti procedimenti.

(1) scrivi "–45.34"	(1) scrivi "13."	(1) scrivi "0.03"
(2) scrivi "0"	(2) scrivi "568"	(2) poni *n*=1
(3) vai a (2)	(3) vai a (2)	(3) scrivi *n* volte "2"
		(4) scrivi "47"
		(5) poni *n*=*n*·2 e vai a (3)

e4 Descrivi con un procedimento simile a quelli dell'esercizio precedente il risultato dei seguenti calcoli:

2/13   13/11   16.8/105   5/48   41/3.7

e5 Nella ditta BatDat il controllo dei dati non viene effettuato con calcoli manuali, ma usando un programma al calcolatore che procede secondo il diagramma di flusso a lato (la casella col bordo spesso è quella di avvio). Qui sotto è riportato un esempio d'uso del programma. Sai spiegare il procedimento di calcolo impiegato dal programma? (ricorda che "\" rappresenta la divisione intera)

?4?5?8?9?6?4?/?6 dato errato
?4?5?8?9?6?6?4?/?6 ok
?4?5?8?0?6?6?4?/?6 ok

e6 Siano f: $x \to 2x^3+x^2+2x+1$, g: $x \to x^3+2x+2$. Completa le seguenti eguaglianze (esprimendo i numeri mancanti in base dieci).

f(10) =	f(2) =	f(3) =	f(4) =
g(10) =	g(2) =	g(3) =	g(4) =
$(2121)_{10}$ =	$(2121)_2$ =	$(2121)_3$ =	$(2121)_4$ =
$(1022)_{10}$ =	$(1022)_2$ =	$(1022)_3$ =	$(1022)_4$ =

e7 Usa Poligon (o un altro programma) per calcolare in corrispondenza di opportuni input gli output di opportune funzioni, in modo da controllare gli esiti dell'es. precedente. Spiega come hai proceduto.

e8 Per "mettere a segno" un particolare orologio digitale, dopo aver reso lampeggianti con opportune pressioni di uno dei pulsanti le cifre da modificare (quelle delle ore o quelle dei minuti), occorre premere ripetutamente l'altro pulsante, fino a che non si arriva ai valori "giusti". Indichiamo con S_1 la funzione successore per le ore (quella che ad ogni "ora" associa l'ora successiva dopo la pressione del pulsante) e con S_2 la funzione successore per i minuti. S è la funzione successore per i numeri naturali.

1) Descrivi gli insiemi di numeri naturali A_1 e A_2 che costituiscono il dominio di S_1 e di S_2.
2) Completa la seguente tabella indicando quanti e quali sono gli elementi del tipo specificato.

	Insieme dei naturali dotato di S	*A_1 dotato di S_1*	*A_2 dotato di S_2*
elementi da cui applicando ripetutamente il successore si ottengono tutti gli altri elementi			
elementi che non possono essere output della funzione successore			

e9 Abbiamo visto quali informazioni vengono codificate dai primi 15 caratteri dei numeri di codice fiscale (i primi 6 caratteri di DPTNMR57D50D969V codificano cognome e nome, i successivi 5 codificano data di nascita e sesso, i successivi 4, cioè D969, codificano la località di nascita). La lettera finale (V nel nostro esempio) non rappresenta informazioni, ma è un *carattere di controllo di correttezza* del numero di codice fiscale. Per capirne il significato pensiamo a una situazione di questo genere:

In un ufficio della ditta BatDat occorre battere su calcolatore una grande quantità di dati presenti in pratiche che provengono da altri uffici. Per ridurre la probabilità che vengano commessi errori di scrittura, la direzione dell'azienda decide che in tutte le pratiche i dati siano scritti aggiungendo sulla destra, preceduta da "/", una cifra che rappresenti la somma delle cifre calcolata come nella "prova del 9" (dalla somma delle cifre si sottrae ripetutamente 9 fino ad ottenere un numero a 1 cifra diverso da 9). Ad es. il dato 3 milioni e 457 mila 14 viene scritto 3457014/6 in quanto 3+4+5+7+0+1+4 → 3+9+7+1+4 → 3+7+1+4 → 10+5 → 1+5 → 6. Se per un errore di battitura o per un precedente errore di trascrizione il dato viene introdotto sul calcolatore come 347014/6, il calcolatore trova 3+4+7+0+1+4 → 1 e, poiché $1 \neq 6$, segnala la presenza di un errore. La cifra aggiunta sulla destra del numero funge da controllo. Analogamente il carattere finale dei numeri di codice fiscale viene determinato in funzione dei caratteri precedenti. Naturalmente l'esattezza del carattere di controllo non garantisce l'esattezza del numero di codice: i caratteri di controllo sono tanti quante le lettere dell'alfabeto mentre i numeri di codice fiscale sono ben di più!

(*a*) Usando questo metodo calcola la cifra di controllo di 187236, di 73641, di 12345678, di 2345678.
(*b*) Commettendo un solo errore di battitura si può introdurre invece di 3457014 un numero che abbia la stessa cifra di controllo? e nel caso di 3457214? e commettendo due errori di battitura?

e10 Una azienda che produce elettrodomestici identifica ogni prodotto che esce dalla fabbrica con un numero di codice composto dalle 2 cifre finali dell'anno di produzione e 3 caratteri che indicano il numero progressivo di produzione usando il sistema di 36 cifre 0, 1, …, 9, A, …, Y, Z (ad es. 09001 e 09002 identificano i primi due elettrodomestici prodotti nel 2009). Quanti elettrodomestici ha prodotto nel 2008 se l'ultimo pezzo prodotto in tale anno ha numero di codice 08B2X?

e11 Usa opportunamente Poligon (o un altro programma) per trovare le rappresentazioni decimali di $(232)_5$ e di $(232)_{16}$. Come troveresti analogamente quelle di $(2233)_4$, $(1012)_8$ e $(BD2)_{16}$?

e12 Come definiresti una funzione-somma per il caso che segue, in modo che, se indichiamo con $m(+)n$ il risultato della sua applicazione a m e a n (m e n numeri interi tra 1 e 99)?

$m(+)1$ sia il numero della persona arrivata subito dopo la persona con il biglietto m, $m(+)2$ sia il numero della persona 2 posti dopo la persona con il biglietto m, **...**

Prima completa gli esempi seguenti e poi tenta di dare una definizione generale.

90 (+) 9 = 90 (+) 10 = 33 (+) 50 = 33 (+) 80 =

1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini: *numero intero* (§1), *numero* (§1), *rappresentazione in base …* (§2), *numeri naturali* (§3), *successore* (§3).

2) Su un foglio da "quadernone", nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").

I numeri

Le strutture numeriche e i loro usi

Scheda **2**

La struttura dei numeri reali e altre strutture numeriche

1. I numeri reali

I numeri interi costituiscono un modello matematico impiegato per misurare o individuare lo stato di fenomeni che variano a scatti. Ad esempio per individuare i piani di un edificio assumendo come riferimento il piano terra (→ *figura 1*, pulsantiera di un ascensore).

figura 1

Esaminiamo ora un fenomeno che varia con continuità. Ad esempio il *trascorrere del* ***tempo***

Consideriamo un recipiente pieno d'acqua con un piccolo foro sul fondo da cui escano gocce; l'acqua sia mantenuta allo stesso livello da un rubinetto controllato da un galleggiante, in modo che le gocce escano con frequenza costante, cioè passi sempre lo stesso tempo tra la caduta di una goccia e la caduta della goccia successiva. Il livello dell'acqua e la dimensione del foro siano tali che cada una goccia ogni secondo.

Supponiamo che ogni goccia che cade faccia avanzare di una posizione un contatore meccanico. Il contatore passa da …000 a …001, …002, …003, … . Se azzero questo *contasecondi* quando inizia un certo fenomeno e se quando questo termina il contatore segna, ad esempio, 138 dirò che il fenomeno è durato 138 secondi (→ *figura 2*).

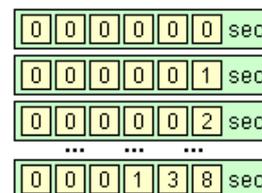



figura 2

Questo numero è una ***misura*** del tempo trascorso. Non rappresenta tuttavia esattamente la durata del fenomeno:

- quando azzero il contatore la goccia uscita per ultima dal foro ha già percorso un po' di strada; impiega quindi meno di 1 secondo a completare la caduta e a far scattare il contatore sulla posizione 1; perciò quando il contatore scatta a 138 in realtà è trascorso un tempo compreso tra 137 e 138 secondi;
- d'altra parte se il fenomeno finisce quando il contatore, pur segnando ancora 138, sta per scattare a 139, il tempo trascorso potrebbe essere di quasi 139 secondi.

In definitiva possiamo concludere solamente che il tempo trascorso è compreso tra 137 e 139 secondi. Diremo che 138 secondi è una misura ***approssimata*** della durata del fenomeno considerato, e che il valore vero della misura può discostarsi da essa di 1 secondo in più o in meno. In breve scriviamo: durata = 138±1 sec (o 138 ± 1 s, come si usa in "fisica").

Supponiamo di modificare il nostro ipotetico *cronometro ad acqua*: allarghiamo il foro e aumentiamo il livello dell'acqua in modo che le gocce escano più velocemente, esattamente 10 gocce al secondo. Aggiungiamo una ruota dentata sulla destra del contatore e scriviamo preceduta da un punto la cifra ad essa corrispondente. Il contatore passerà da …000.0 a …000.1, …000.2, …. Supponiamo che con il nuovo apparato "misuratore" il fenomeno considerato termini quando il numero segnato è 138.2.

138.2 sec è una misura della durata del fenomeno *più precisa* della precedente. Viene letta "138 punto 2 secondi" o "138 secondi e 2 decimi di secondo"; infatti l'intervallo di tempo che deve ripetersi 10 volte per fare 1 sec viene detto *decimo* di secondo.

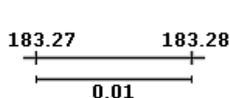
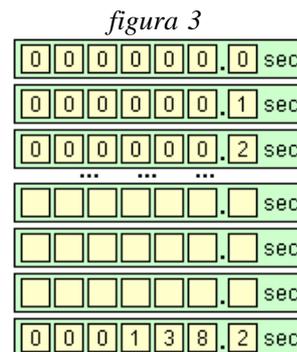
Tuttavia anche questa misura non è esatta. Con un ragionamento analogo al precedente possiamo concludere che vi può essere un *errore* di un decimo di secondo: durata = 138.2±0.1 sec.

1 Completa *figura 3*, che rappresenta i successivi stati del nuovo apparato misuratore.

Ogni cronometro si basa sul ripetersi con frequenza costante di un certo evento (la caduta di una goccia, il pendolo che passa per la verticale, la molla che passa per la posizione di riposo, l'oscillazione di un cristallo di quarzo eccitato elettricamente, …). Chiamiamo ***tic*** questi eventi. Nei cronometri moderni, che si basano in genere sull'oscillazione di cristalli di quarzo, il numero visualizzato non scatta ad ogni tic, come accade nei modelli di cronometro sopra visti, ma tra uno scatto e il successivo intercorrono molti più tic. In questo modo diventa trascurabile il conteggio di un tic in più o in meno.

figura 3

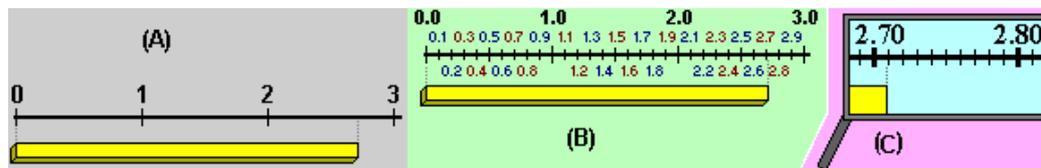
Ad esempio se vengono visualizzati i centesimi di secondo e vi sono 8000 tic al secondo, un tic in più o in meno corrisponde a una variazione di 1/8000 = 0.000125 sec, che è trascurabile rispetto a 0.01 sec.

Dunque *possiamo ritenere che un moderno cronometro che segni i centesimi di secondo visualizzi esattamente il numero dei centesimi di secondo trascorsi tra quando è stato fatto partire e quando è stato arrestato.*

Non otteniamo tuttavia il valore esatto del tempo trascorso, ma solo il suo *troncamento* ai centesimi di secondo. Nel caso in cui venga visualizzata la misura 183.27 sec, possiamo solo concludere che la misura esatta è compresa tra 183.27 sec e 183.28 sec, ovvero dire che 183.27 sec la approssima per difetto a meno di un errore di 0.01 sec. Con strumenti più precisi potremmo arrivare all'intervallo [138.273, 138.274], e così via.

Però *più di tanto non possiamo migliorare la misurazione*: prima o poi arriviamo ai limiti delle nostre possibilità tecnologiche (eventi utilizzabili come tic, dispositivi impiegabili per il conteggio, …).

A ciò è da aggiungere il fatto che *non è possibile avviare e arrestare il cronometro esattamente all'inizio e alla fine del fenomeno.* Se impiego un cronometro che mi consente di arrivare alla misura 138.27 sec (troncata ai centesimi di secondo), non è detto che la cifra 7 sia significativa. Se faccio partire il cronometro con un ritardo di circa 15 centesimi di secondo e lo arresto con circa 37 centesimi di secondo di ritardo, la misura risulta essere allungata di un intervallo di tempo pari a circa 37-15=22 centesimi di secondo: la misura corretta è quindi circa 138.05 secondi. L'errore introdotto dall'utente (22 centesimi di secondo) supera quello dello strumento (1 centesimo di secondo). [→ quesito e11 della scheda 3 di *Le statistiche*]. La *misura esatta* della durata che stiamo considerando potrebbe essere, in secondi, 138.27356018… e così via con infinite altre cifre, ma noi *non potremo mai conoscerla completamente.*

Per misurare ***lunghezze*** procediamo in modo simile. Prendiamo un nastro metallico su cui fissiamo una *tacca* 0 e, alla distanza di 1 metro, la tacca 1; riportando successivamente 1 metro possiamo segnare le tacche 2, 3, …. Con questo nastro misuratore possiamo effettuare misure approssimate al metro.

Per esempio possiamo stendere il nastro a fianco ad un'asta con la tacca 0 a una estremità dell'asta; se all'altra estremità corrisponde una tacca compresa tra 2 e 3 possiamo concludere che l'asta misura 2 m. È una misura approssimata per difetto (troncata), con errore al più di 1 metro.

Possiamo poi suddividere ogni *divisione*, cioè ogni parte di nastro compresa tra due tacche, ad esempio tra la tacca 0 e la tacca 1, in 10 parti uguali. In corrispondenza delle vecchie tacche possiamo aggiungere ".0" (0 → 0.0, 1 → 1.0, 2 → 2.0, 3 → 3.0); in corrispondenza delle nuove tacche scriveremo 0.1, 0.2, …, 0.9, 1.1, 1.2, …. Con ulteriori suddivisioni potremmo migliorare la misura, ma non si potrà mai arrivare alla misura esatta. Del resto le estremità dell'asta non sono perfettamente lisce, nonostante ciò che può apparire a prima vista o al tatto. Con una lente potente o con un microscopio (→ *figura 4*) si possono osservare piccoli rilievi, ad esempio di qualche decimo di millimetro. Arrivati alla misura 2.708 (2 m, 7 dm, 8 mm) non ha senso procedere oltre. D'altra parte, come nel caso della misura del tempo, occorre tener conto anche degli errori (cioè delle variazioni rispetto alla misura corretta) che introduce chi misura:

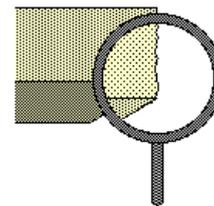



figura 4

nel posizionare il nastro misuratore non è possibile far corrispondere esattamente la tacca 0 alla prima estremità dell'asta, nel leggere la misura vi può essere qualche incertezza nel determinare la tacca corrispondente alla fine dell'asta, … (➨ *animazione*)

I ***numeri reali*** (o, più semplicemente, numeri) sono i modelli matematici impiegati per rappresentare le misure esatte. Come abbiamo visto si tratta di un modello ***astratto***: con una misurazione non è possibile determinare con infinite cifre il valore di una grandezza Tuttavia il suo uso ci consente di fare ragionamenti più semplici, senza tener conto delle limitazioni delle misure. Ci consente di parlare di:

- tempi uguali (senza misure esatte come potremmo dire che due fenomeni hanno la stessa durata?),
- rettangoli (come potremmo dire che quattro angoli hanno la stessa ampiezza?),
- sfere (come potremmo dire che un oggetto, comunque lo si posizioni, ha sempre lo stesso spessore?),
- ...

Nei *casi pratici*, naturalmente, dovremo poi tenere conto di queste astrazioni.

2 Voglio tagliare una trave di legno in modo da ottenere tre blocchetti di legno uguali tali che, appilati uno sull'altro, mi consentano di formare una pila alta 17 cm.
(a) Qual è la misura esatta della terza parte di 17 cm?
(b) A quale distanza (approssimata) ha senso tracciare i segni in cui posizionare la sega? (5 cm o 6 cm o 5.6 cm o 5.8 cm o …? perché?)
(c) Stima di quanto potrebbe differire da 17 cm la pila che si ottiene con i blocchetti così costruiti.

Nota Con una misurazione non si possono trovare tutte le cifre che esprimono il valore di una grandezza. Tuttavia vi sono grandezze di cui si conosce la misura esatta. Si tratta di grandezze il cui valore viene assegnato convenzionalmente: ad es. si assumono come misura della temperatura dell'acqua in ebollizione al livello del mare (cioè alla pressione di 1 atmosfera) il valore 100.000…°C e come misura della temperatura dell'acqua che sta solidificandosi al livello del mare il valore 0.000…°C. Si possono, poi, conoscere esattamente le misure di grandezze che possono dedursi con calcoli matematici da altre misure esatte. Ad es. possiamo dire che un quadrato che abbia lato lungo esattamente 2.4 cm ha area pari esattamente a $2.4^2 = 5.76$ cm^2.

2. La retta dei numeri

I numeri vengono spesso rappresentati disposti lungo una linea retta, che possiamo immaginare come l'unione di due nastri misuratori senza spessore e senza fine, disposti su direzioni opposte e con la tacca 0 in comune. Il nastro destro rappresenta i numeri positivi, il nastro sinistro quelli negativi. Questa linea viene chiamata ***retta (o linea) dei numeri***.

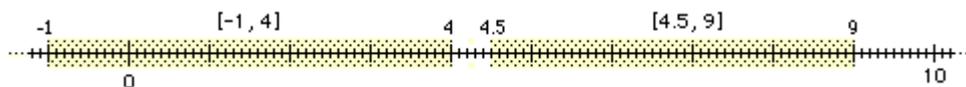
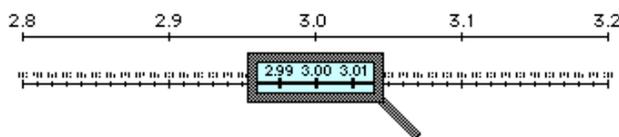
Naturalmente questa linea non è da intendere come una linea del tipo di quelle che si possono tracciare con una penna o con un altro oggetto. Le linee della "realtà" hanno sempre uno spessore e, prima o poi, se non ritornano su se stesse (come nel caso di una circonferenza), finiscono.

Questa invece, anche se nel tracciarla sulla carta le diamo un certo spessore e una lunghezza limitata, è una linea che immaginiamo infinitamente sottile e che si sviluppi senza fine in entrambe le direzioni.

Supponiamo inoltre che, comunque si prendano su di essa due punti distinti, si possano prendere tra essi quanti altri punti si vogliono. Nelle linee della "realtà" invece prima o poi i punti andrebbero a sovrapporsi, così come nei nastri misuratori usati nella pratica le tacche non si possono infittire più di tanto.

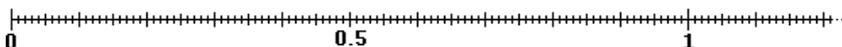
In altre parole, siamo di fronte a un modello matematico astratto. Quando parleremo di ***punto*** della retta dei numeri non intenderemo un punto tracciabile "concretamente", che ha sempre qualche dimensione, ma una ***posizione*** sulla retta dei numeri, che può essere *individuata esattamente con un numero reale.*

La retta dei numeri illustra in forma schematica l'uso dei numeri reali per rappresentare grandezze fisiche. Non è altro che una generalizzazione delle usuali scale graduate impiegate negli strumenti di misura.

Mentre sulla scala termometrica diciamo che tra 6° e 11° o tra -1° e 4° vi è una differenza di 5°, sulla retta dei numeri diremo che tra il punto 6 e il punto 11 o tra il punto -1 e il punto 4 vi è la *distanza* 5 (senza unità di misura). Diremo anche che l'intervallo [6, 11], cioè l'insieme dei punti compresi tra 6 e 11, e l'intervallo [-1, 4] hanno *lunghezza* o *ampiezza* 5. Analogamente l'intervallo [4.5, 9] ha ampiezza 4.5. (→ *intervallo* in *Gli oggetti matematici*).

In corrispondenza delle tacche, cioè dei punti che delimitano una divisione dall'altra, abbiamo numeri che da un certo punto in poi proseguono sempre con la cifra 0:

- attorno al punto 3 alla prima scansione in tacche si ha: …, 1, 2, ***3***, 4, 5, …
- con la successiva suddivisione: …, 2.8, 2.9, ***3.0***, 3.1, 3.2, …
- con un'ulteriore suddivisione: …, 2.98, 2.99, ***3.00***, 3.01, 3.02, …
- poi: …, 2.998, 2.999, ***3.000***, 3.001, 3.002, …

Comunque, sia che scriviamo 3, sia che scriviamo 3.0, 3.00, 3.000, … o 3.000… (sottointendendo una sequenza senza fine di 0), vogliamo identificare sempre lo stesso punto, sono da intendere come diverse rappresentazioni dello stesso numero. Analogamente 420.7, 420.70, 420.7000… sono diverse come sequenze di simboli ma sono ***uguali*** *come numeri*.

3 Metti in ordine di grandezza le seguenti misure, che supponiamo esatte: 0.53 m, 1.18 m, 1.2 m.

4 Rappresenta i numeri 0.53, 1.18 e 1.2 sulla retta dei numeri.

5 Un alunno di scuola media di fronte alla domanda se sia più lungo uno spago che misuri esattamente 2.37 m o uno che misuri esattamente 2.8 m risponde che è più lungo il secondo. Ha risposto correttamente? Se la risposta è affermativa, spiega perché, se la risposta è negativa cerca di individuare quale ragionamento errato c'è dietro alla risposta dell'alunno.

Nota Quando non si esprimono valori esatti, ma valori approssimati, con le scritture 420.7 e 420.70 o con 3.0 e 3.00 in genere si intendono informazioni differenti: 420.7 è una approssimazione con 4 cifre significative e 420.70 è un'approssimazione con 5 cifre significative, 3.0 è una approssimazione con 2 cifre significative e 3.00 è un'approssimazione con 3 cifre significative. Nel caso in cui i numeri esprimano misure in metri e si stiano considerando arrotondamenti, 420.7 indica una misura arrotondata ai decimetri (420.7 è la tacca dei decimetri più vicina) e 420.70 indica una misura arrotondata ai centimetri (420.70 è la tacca dei centimetri più vicina). Se invece fossero stati troncamenti, 420.70 avrebbe indicato un valore compreso tra 420.70 e 420.71.

Analogamente se si afferma che la popolazione di una certa città è $2.40\cdot10^6$ (2.40 milioni) di abitanti, si intende che essa sia arrotondata a 3 cifre, cioè che sia compresa tra 2395000 e 2405000 abitanti.

Ricordiamo che dato un numero $c_n\,c_{n-1}\ldots c_2\,c_1\,c_0\,.\,c_{-1}\,c_{-2}\ldots$ o $0\,.\,0\ldots0\,c_n\,c_{n-1}\ldots$ in cui la cifra c_n sia diversa da 0, *n* viene detto ***ordine di grandezza*** del numero. Cioè *n* è il posto della prima cifra diversa da 0 del numero. Ad esempio 4567.85 ha ordine di grandezza 3 (o delle migliaia) e 0.0149 ha ordine di grandezza -2 (o dei centesimi). Per ***confrontare*** *due numeri* positivi occorre:

(1) in prima istanza confrontare i loro **ordini di grandezza**;
Ad es. 0.031 e 0.0079 hanno ordini di grandezza -2 e -3. Il primo è maggiore del secondo, quindi 0.031 è maggiore di 0.0079.

(2) se il passo (1) non è stato risolutivo, cioè se i numeri hanno stesso ordine di grandezza (sia esso *n*), confrontare le **cifre iniziali** (cioè le cifre di posto *n*;
Ad es. 35689 e 40205 hanno stesso ordine di grandezza, 3 è minore di 4, quindi il primo numero è minore del secondo.

(3) se il passo precedente non è stato risolutivo, confrontare le **cifre successive**, cioè porre *n*=*n-1* e confrontare le cifre di posto *n;*
Ad es. 0.46 (cioè 0.46000…) e 0.4 (cioè 0.40000…) hanno stesso ordine di grandezza -1, stessa cifra di posto -1, ma differenti cifre di posto -2: 6 è maggiore di 0 quindi il primo numero è maggiore del secondo.

(4) se il passo precedente non è stato risolutivo, procedere come in (3), e così via.

3. Numeri limitati e numeri periodici

Come si fanno le ***operazioni*** *tra numeri reali*? Voi sapete eseguire le operazioni con i ***numeri limitati***, cioè con i numeri composti da una sequenza finita di cifre o, meglio, che da un certo punto in poi hanno tutte le cifre uguali a 0. Sono i punti che corrispondono a tacche. Si procede riconducendosi ad operazioni con numeri interi. Vedi gli esempi seguenti, riferiti al calcolo di 1456.3+47.932, 12.3·0.21, 12/0.3:

```
1456.300 +        123 ×  ← 12.3  (faccio ·10)          1.2 / 0.3 =
0047.932 =         21 =  ← 0.12   (faccio ·100)        12 / 3 = 4
--------         ----
1504.232          123
                 2460
                 ----
                 2583  → 2.583 (faccio /1000)
```

Somma, prodotto e differenza di due numeri interi sono ancora numeri interi. Quindi anche somma, prodotto e differenza di due numeri limitati sono ancora numeri limitati. Vediamo un esempio di *divisione:* 38/7.

```
     unità
        38|7
       -35|5        decimi
        =3|  →         30|7
                      -28|4      centesimi
                       =2|  →          20|7
                                      -14|2      millesimi
                                       =6|  →          60|7
                                                      -56|8
                                                       =4|  →   ...
```

Quindi 38/7 = 5 unità + 4 decimi + 2 centesimi + 8 millesimi + … = 5.428…

6 Calcola in modo simile 23/12 e 14/700, trovando i risultati approssimati per troncamento ai millesimi.

Tutte le cifre di una divisione tra interi possono essere ottenute facilmente con lo **script** di cui qui puoi esaminare il testo e che puoi eseguire cliccando **qui**. Ecco che cosa puoi ottenere:

7 Verifica che se (nel modo ora descritto) esegui le divisioni 6/25 e 24/7 ottieni i valori descrivibili nel modo seguente, e cerca di spiegare perché ciò accade.

	(1)	scrivi "0.24"		(1)	scrivi "3."
(3.1)	(2)	scrivi "0"	**(3.2)**	(2)	scrivi "428571"
	(3)	vai a (2)		(3)	vai a (2)

Il gruppo di cifre che si ripete, cioè il gruppo di cifre stampato al passo (2), viene detto ***periodo***.

I numeri precedenti sono scritti anche nella forma: $0.24\overline{0}$ e $3.\overline{428571}$

Con la soprallineatura abbiamo indicato la ripetizione della sequanza di cifre segnate.

I numeri che da un certo posto in poi presentano un periodo, cioè una sequenza di cifre che si ripete, vengono detti ***periodici.***

*Il risultato di una **divisione tra due numeri interi*** m *e* n *è sempre un numero periodico.*

Infatti, come abbiamo visto per un caso particolare nel quesito 7, i valori che può assumere il ***resto*** sono 0, 1, 2, …, *n*-1 (dividendo per 7 come resto posso ottenere 0, 1, 2, … o 6). Prima o poi ottengo un valore già ottenuto in precedenza; dopo, l'esecuzione continua ripetendosi esattamente nello stesso modo, fino a riottenere nuovamente lo stesso resto, e così via.

8 Col programma precedente ottengo che 450/29 fa:
15.5172413793103448275862068965517241379310344827586…
Quanto è lungo il periodo di questo numero? Quanto può essere lungo al massimo il periodo di *m*/*n*? Perché?

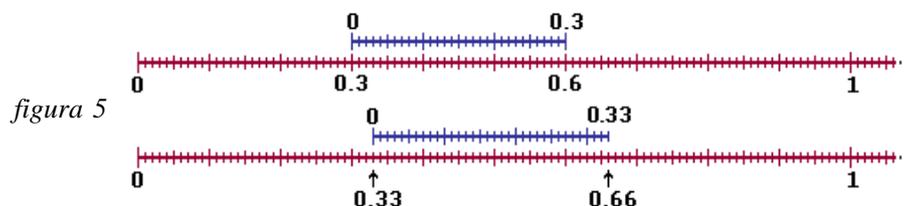
9 I numeri con periodo 0 come possono essere chiamati?

4. Approssimazioni e operazioni tra numeri reali

Abbiamo richiamato come si fanno le operazioni con i numeri limitati. Abbiamo visto che le divisioni tra numeri limitati possono dar luogo a numeri non limitati (ma comunque periodici). Vediamo ora come si possono eseguire le *operazioni tra numeri non limitati.* Nel seguito, per semplicità di scrittura, ***converremo*** che, a meno di indicazioni contrarie, un gruppo di cifre che si ripeta per tre volte e sia seguito da "**…**" indichi un numero che abbia questo gruppo di cifre come periodo. Ad esempio 3.4570570570… indicherà che questo numero inizia per 3.4 e poi è seguito da una ripetizione, senza fine, del gruppo di cifre 570.

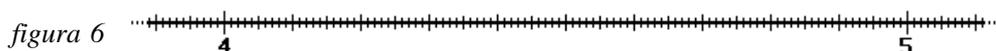
10 Come calcoleresti 3.222…·4, 3.222…+3.555…, 3.222…/2 ?

In casi semplici, come quelli del quesito 10, è facile eseguire il calcolo. Il procedimento impiegato è in accordo con il significato che le operazioni assumono quando con i numeri reali vengono rappresentate grandezze fisiche. Vediamo ad es. il calcolo di 0.333…+0.333…. Possiamo sommare le cifre a partire da sinistra. Calcolando 0.3+0.3 trovo la lunghezza del segmento che si ottiene concatenando due segmenti lunghi 0.3. Calcolando 0.33+0.33 trovo la lunghezza del segmento che si ottiene concatenando due segmenti lunghi 0.33. Man mano ottengo misure più precise della lunghezza del segmento che si ottiene concatenando due segmenti lunghi 0.333… (→ *figura 5*). Procedendo nel calcolo vengo a generare il numero 0.666….

figura 5

11 Quanto fanno 0.666…+0.333… e 0.333…·3? Quanto fanno $2/3 + 1/3$ e $2/3 \cdot 3$? Trovi qualche contraddizione?

12 Tra due istanti possiamo sempre pensare che vi sia un istante intermedio, tra due punti della retta dei numeri possiamo sempre pensare di prendere un punto a metà strada, …. Sapresti scrivere un numero compreso tra 4.999… e 5.000…?

13 Sulla retta della seguente *figura 6* individua il punto 4.9, poi il punto 4.99, poi il punto 4.999, … Procedendo in questo modo, se potessi operare sulla retta dei numeri astratta e con strumenti in grado di tracciare punti "senza spessore", ti avvicineresti sempre più al punto 5. Che distanza da 5 ha il punto 4.999? e il punto 4.999999?

figura 6 4 5

È impossibile distinguere il punto 4.999… dal punto 5, il punto 0.999… dal punto 1. Analogamente è impossibile distinguere, ad esempio, 67.2999… dal punto 67.3. Anche in questi casi diremo che siamo di fronte a ***numeri uguali***. Quindi 0.999… = 1, -4.27999… = -4.28, …

14 Prova a calcolare 0.373737…+0.416416416…

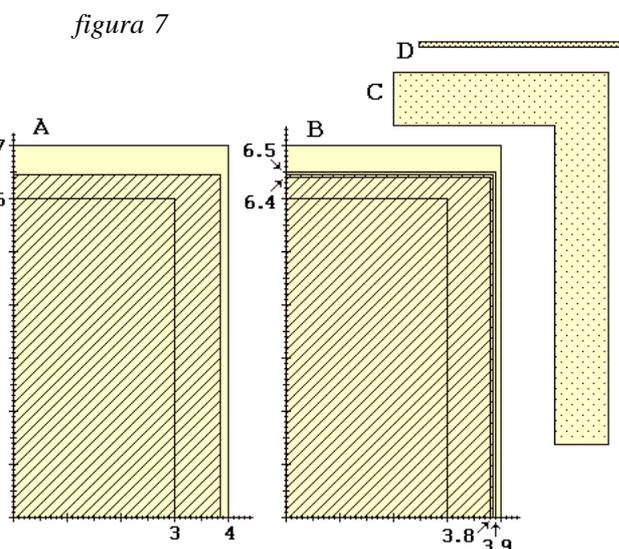
Abbiamo visto con vari esempi che in qualche modo si riescono a sommare i numeri periodici. Nel caso del quesito precedente siamo riusciti a capire che il risultato è 0.790153790153790153…. Non è tuttavia un procedimento comodissimo. Ancora più complicato è il caso del prodotto. Se poi i numeri su cui operare non sono periodici non possiamo con sicurezza stabilire le cifre del risultato: nel caso di una addizione non possiamo prevedere se passando a sommare nuove cifre otterremo dei riporti che faranno cambiare le ultime cifre calcolate. Vi è tuttavia un modo più generale per operare con i numeri reali. Lo illustreremo a partire da alcuni esempi.

In *figura 7* è riprodotta una piastra rettangolare. Usando una riga graduata posso trovare che le misure in centimetri della base e dell'altezza sono, troncate agli interi, 3 e 6. In altre parole: 3 cm $\le$ *base* $\le$ 4 cm, 6 cm $\le$ *altezza* $\le$ 7 cm (figura **A**).

Posso concludere che l'area della piastra è compresa tra $3 \cdot 6 = 18$ cm^2 e $4 \cdot 7 = 28$ cm^2 (le aree dei rettangoli intreno ed estreno).

La figura a L rovesciata più grande (figura **C**) è la differenza tra il rettangolo esterno e il rettangolo interno.

La sua area è la *differenza tra la approssimazione per eccesso* (28 cm^2) *e quella per difetto* (18 cm^2).

figura 7

Questa differenza viene chiamata ***indeterminazione*** (o incertezza). Dunque:

$$18\,\text{cm}^2 \le area \le 28\,\text{cm}^2 \qquad indeterminazione = 10\,\text{cm}^2$$

15 Che cosa posso concludere se considero le tacche dei millimetri (→ figure **B** e **D**)?

... $\text{cm}^2 \le area \le$ ... cm^2 *indeterminazione* = ... cm^2

Lo script a cui puoi accedere da **qui** automatizza il calcolo della approssimazione con cui si può conoscere il risultato di una operazione effettuata su dati approssimati, cioè automatizza il calcolo dell'intervallo di indeterminazione del risultato di un'operazione tra dati di cui sono noti gli intervalli di indeterminazione. Sotto è visualizzato che cosa di può ottenere per i casi considerati sopra:

Operazioni tra INTERVALLI di INDETERMINAZIONE
x1 3.8 x2 3.9 y1 6.4 y2 6.5
+ - x / ^
min 24.32 max 25.35 indet 1.03
3 4 6 7 18 28 10
6.4 6.5 24.32 25.35 1.03

Nota. I calcoli vengono effettuati in modo approssimato e in base due. Le ultime cifre potrebbero differire dal valore che ci si attende. Ad esempio nel caso sopra esemplificato si potrebbe ottenere 1.0299999999999976 invece di 1.03. Ma, ormai, sappiamo effettuare facilmente questo arrotondamento a mano.

Come illustra il seguente esempio *migliorando la precisione dei termini dell'operazione si può migliorare quanto si vuole la precisione del risultato*:
calcolo di x/y con x = √10 = 3.162277660168… e y = √2 = 1.414213562373… utilizzando i troncamenti di *x* e di *y* a cifre di posto man mano più piccolo [ricorda che dire che 3.1 è un troncamento ai decimi equivale a dire che il valore esatto è compreso tra 3.1 e 3.2]

x		y		min	max	indet
3.1	3.2	1.4	1.5	2.06666666…	2.28571428…	0.21904761…
3.16	3.17	1.41	1.42	2.22535211…	2.24822695…	0.02287483…
3.162	3.163	1.414	1.415	2.23462897…	2.23691654…	0.00228757…

Come si può osservare, man mano che divido per 10 l'indeterminazione di *x* e di *y* (all'inizio è 0.1, poi è 0.01, …) ottengo il risultato con un'indeterminazione che man mano si divide circa per 10.

5. I numeri razionali

Abbiamo visto come possono essere calcolate le operazioni tra numeri reali. In molti casi si possono utilizzare *proprietà che permettono di semplificare il calcolo.* Vediamo prima alcuni esempi di semplificazione di calcoli su dati "esatti".

- Devo calcolare $5^3 \cdot 2^3$. Posso procedere così: (*a*) $5^3 \cdot 2^3 = 125 \cdot 8 = 1000$
  oppure così: (*b*) $5^3 \cdot 2^3 = (5 \cdot 2)^3 = 10^3 = 1000$
- Devo calcolare $24^2/6^2$. Posso procedere così: (*a*) $24^2/6^2 = 576/36 = 16$
  oppure così: (*b*) $24^2/6^2 = (24/6)^2 = 4^2 = 16$

16 In questi casi quali vantaggi hanno i procedimenti (*b*) rispetto ai procedimenti (*a*) ?

I procedimenti (*b*) sono esempi di applicazione della regola di riscrittura (5.1), già considerata in precedenti schede (→ *Algebra*), o della regola (5.2) (che può esserne considerata un caso particolare se si interpreta la divisione come moltiplicazione per il reciproco):

(5.1) $\mathbf{a^c \cdot b^c \to (a \cdot b)^c}$ **(5.2)** $\mathbf{a^c / b^c \to (a / b)^c}$

Abbiamo già visto che per **c** = 1/2 (5.1) diventa (5.3):

(5.3) **√a·√b → √(a·b)** **(5.4)** **√a / √b → …**

17 Completa (5.4).

Torniamo all'esempio alla fine del paragrafo precedente. Per effettuare questo calcolo possiamo prima impiegare la proprietà (5.4):

√10 / √2 = √(10/2) = √5

e quindi ricondurci al calcolo della radice quadrata di 5.

Vediamo qualche altro esempio di semplificazione di procedimenti di calcolo (prova anche a riscriverli scrivendo le frazioni "a due piani", usando "—" invece di "/"):

(1) (4/3)·(9/2) = (4·9)/(3·2) = 36/6 = 6

(2) (7/2)/(5/4) = (7/2)·(4/5) = (7·4)/(2·5) = 28/10 = 2.8

(3) (7/3)+(2/3) = (7+2)/3 = 9/3 = 3

(4) (7/3)+(5/2) = (7·2)/(3·2) + (5·3)/(2·3) = 14/6 + 15/6 = (14+15)/6 = 29/6 = 4.8333…

Si sono impiegate le riscritture:

(5.5) **(a/b)·(c/d) → (a·c)/(b·d)** (5.6) **(a/b)/(c/d) → (a/b)·(d/c)**

(5.7) **(a/b)+(c/b) → (a+c)/b** (5.8) **a/b → (a·c)/(b·c)**

18 Per ciascuno degli esempi (1)-(4) indica quali riscritture sono state operate.

Nota. Nell'utilizzare queste regole di riscrittura occorre prestare qualche attenzione.
– Ad es. non posso trasformare √-2·√-3 in √(-2·-3), cioè in √6, in quanto √-2 e √-3 sono termini indefiniti.
– Analogamente non posso trasformare 2 / (5/(3-3)) in 2 · ((3-3)/5), cioè in 0, in quanto 5/(3-3) è indefinito.

Non è detto che usando (5.5)-(5.8) si renda effettivamente più semplice il calcolo. Ad esempio nel caso (4) probabilmente il procedimento seguente è più comodo: (7/3)+(5/2) = 2.333…+2.5 = 4.8333…
Comunque questi esempi mettono in luce che le "quattro operazioni" applicate a numeri reali che possono essere espressi nella forma m/n (con m e n numeri interi) danno luogo a risultati che possono essere espressi nella forma m/n. Ciò è spesso molto vantaggioso.

Ad es. se devo calcolare 2.666… · 0.111… posso ricordare che il primo termine è il risultato di 8/3 e che il secondo è il risultato di 1/9 e, usando (5.5), ottenere(8·1)/(3·9) = 8/27.

Se voglio calcolo 8/27, se no lo lascio così: usando l'algoritmo della divisione posso, poi, in un qualunque momento, calcolare facilmente il valore di 8/27 con la precisione che voglio. Oltre tutto, se poi dovessi effettuare altri calcoli con questo numero, la sua rappresentazione come 8/27 potrebbe facilitarmi i procedimenti. Ad es. se dovessi poi effettuare una moltiplicazione per 6 potrei fare così: 8/27·6 = 48/27 e, volendo, lasciare nella forma m/n anche questo risultato; oppure, usando la "semplificazione di frazioni", fare: 8/27·6 = (8·6)/27 = (8·2·3)/(9·3) = (8·2)/9 = 16/9.

I numeri che possono essere espressi come rapporto tra due numeri interi, cioè nella forma m/n (con m e n numeri interi e, naturalmente, $n \neq 0$), vengono detti ***numeri razionali***.

Il nome deriva dal fatto che in Latino i calcoli, e in particolare i rapporti, venivano chiamati *rationes*. In italiano è sopravvissuta la parola *razione* con il significato di *porzione calcolata* (es.: razione di viveri che spetta ad un soldato, razione giornaliera di latte da dare a un neonato, …). Deriva dal Latino (dal verbo *frangere*, che significa *spezzare* - pensa all'italiano "infrangibile") anche la parola *frazione*, che significa *parte* e che, come sai, in matematica è usata per indicare un modo particolare di esprimere i rapporti: m/n come frazione viene letto «m n-esimi».

Abbiamo già visto che tutti i numeri razionali sono periodici: il risultato di una divisione tra interi presenta sempre un periodo. Viceversa è possibile trasformare ogni numero periodico nella forma m/n.
Ad esempio col programma Poligon (che approssima i numeri decimali mediante frazioni) ottengo: 0.140140140140140140140 = 140/999, 0.203203203203203203203 = 203/999, 10.454545454545454545 = 115/11, e posso verificare che effettivamente 140/999 = 0.140140140…, 203/999 = 0.203203203…, 115/11 = 10.454545…

19 Esprimi i seguenti numeri perodici sotto forma di rapporto tra numeri interi e verifica man mano la correttezza della risposta usando la CT:
0.303030… = … 0.030303… = …
4.0131313… = 40.131313…/10; 40.131313… = 40+0.131313… = …
quindi 4.0131313… = …

Si può quindi concludere che:

*l'insieme dei **numeri razionali** coincide con l'insieme dei **numeri periodici**.*

Da (5.7) e (5.8) si può derivare: (**5.9**) **(a/b)+(c/d) → (a·d+c·b)/(b·c)**

che mette in luce che la somma di due numeri razionali è ancora un numero razionale.

(5.9) vale anche con "-" al posto di "+" (basta interpretare la sottrazione come addizione dell'opposto). Da essa e da (5.5) e (5.6) possiamo concludere che applicando le "quattro operazioni" a numeri razionali si ottengono ancora numeri razionali. Questo fatto può essere espresso dicendo che l'insieme dei numeri razionali (ovvero, l'insieme dei numeri periodici) è ***chiuso*** rispetto alle "quattro operazioni". Questa terminologia vuol ricordare il fatto che se sono nell'insieme dei numeri razionali e applico le quattro operazioni non "esco" da tale insieme. L'insieme dei numeri limitati invece non è chiuso rispetto alla divisione: 10/3 fa 3.333…, che non è limitato.

20 Completa la seguente tabella mettendo "OK" se l'insieme è chiuso rispetto all'operazione indicata, mettendo un esempio di operazione che fa uscire dall'insieme altrimenti (è da sottointendere che sono da escludere i casi in cui la divisione non è definita). Nella tabella, accanto ad alcuni insiemi numerici, sono indicati i simboli con cui vengono usualmente denotati (la "q" con cui viene indicato l'insieme dei numeri razionali deriva dal fatto che essi sono rappresentabili come **q**uozienti esatti di numeri interi).

	addizione	sottrazione	moltiplicazione	divisone
razionali (**Q**)	OK	OK	OK	OK
decimali limitati				10/3
interi (**Z**)				
naturali (**N**)				

Sembrerebbe che restando all'interno dei numeri razionali si possano fare tutti i calcoli che si possono fare con i numeri reali (**R**). In realtà non è così. Ad es. si può dimostrare che la radice quadrata di 2, quella di 3, quella di 5 e quelle di moltissimi altri numeri (anzi, le radici quadrate di una quantità infinita di numeri) non sono numeri razionali. In altre parole l'insieme dei numeri razionali non è chiuso rispetto all'operazione di estrazione della radice quadrata.

I numeri non razionali vengono detti ***irrazionali***.

Osserviamo che in questo caso si fa un uso dell'aggettivo *irrazionale* del tutto diverso da quello fatto nel linguaggio comune, in cui viene impiegato per indicare fenomeni di cui non si riescono a spiegare i motivi, che avvengono in modo caotico, e atteggiamenti non meditati, non "calcolati" (anche questo uso deriva dal Latino: con *rationes* oltre ai calcoli in senso stretto venivano indicati i calcoli nel senso di "ragionamenti, meditazioni elaborate, …"; in italiano usiamo: "comportamento razionale", "razionalmente", …)..

Infatti non è detto che un numero irrazionale si sviluppi in modo caotico, non spiegabile secondo un qualche schema. Si pensi ad esempio a: 0.5050050005000050000050… che posso generare scrivendo un "5" separato da un numero man mano incrementato di uno di "0"; esso non si sviluppa in modo "irrazionale" in quanto le sue cifre si susseguono secondo uno schema fissato.

21 Apri questo **script**. Esso genera un numero razionale o irrazionale? Come puoi modificarlo in modo che generi un numero che non sia tale?

6. Esercizi

e1 Un'aiuola ha forma triangolare. Sapendo che le misure della base e dell'altezza sono rispettivamente 255±5 cm e 185±5 cm, che cosa puoi concludere sul valore dell'area dell'aiuola?

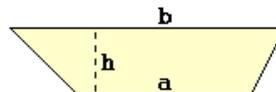
e2 Una scatola metallica di forma cubica ha lo spigolo di 21.5±0.1 cm. Che cosa puoi concludere sul valore del suo volume?

e3 Una ruota ha diametro di 453±1 mm. Sapendo che 3.141 ≤ p ≤ 3.142 (e non conoscendo altre cifre di p), che cosa puoi concludere sulla lunghezza della circonferenza della ruota?

e4 Il 37% degli abitanti con almeno 40 anni di un certo comune ha la licenza media.
(a) Sapendo che gli abitanti con almeno 40 anni del comune sono 31572, quanti sono quelli con la licenza media? [poiché la percentuale è arrotondata, cioè cade tra 36.5 e 37.5, non potrai trovare un valore esatto, ma un intervallo di indeterminazione]
(b) Qual è l'arrotondamento alle migliaia di questa parte di popolazione?

e5 So che una pila di 250 fogli dello stesso tipo pesa 860±5 grammi ed è alta 2.4±0.1 cm. Individua, con la miglior precisione possibile, il peso medio e lo spessore medio di un foglio.

e6 Ho un disegno e una sua riduzione realizzata con una fotocopiatrice che può riprodurre copie con le scale: 50%, 51%, 52%, …, 149%, 150%. La distanza tra due punti del disegno originale è di 17 mm, quella tra i corrispondenti punti nella fotocopia è di 12 mm. Sapendo che le misure sono troncate ai millimetri (cioè, ad es., che la prima misura cade tra 17 e 18 mm) puoi individuare esattamente la scala di riproduzione utilizzata o puoi delimitarla (cioè: la scala al massimo è … e al minimo è …)?

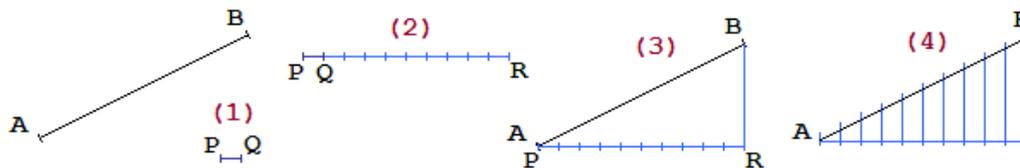
e7 Una lamiera a forma di trapezio ha dimensioni in *mm* (vedi figura): *a* = 240±1, *b* = 357±1, *h* = 114±1. Trovane l'area. [trova l'intervallo di indeterminazione per *a*+*b*, poi per *(a+b)·h*, e quindi per *(a+b)·h/2*.

e8 So che 1000 cm^3 (= 1 litro) d'olio pesa 930±10 g, cioè che il suo peso in grammi ha come intervallo di indeterminazione [920,940]. Qual è il volume di 1000 g (= 1 kg) di olio?
Traccia. Se il peso fosse esattamente 920g avrei, indicando con V il volume in cm^3 e con P il peso in grammi: V/P = 1000/920, da cui, esprimendo V in funzione di P, V = 1000/920·P; se P = 1000 ho V = 1086.956… Analogamente, se il peso fosse esattamente 940 grammi avrei …

e9 Su un giornale leggo «il tasso annuo di guasto degli apparecchi telefonci della ditta X è 16%, cioè un apparecchio ha mediamente 0.16 guasti all'anno; questo vuol dire che l'apparecchio ha problemi mediamente ogni 6.25 anni». È corretta questa conclusione? [Segui la traccia indicata]
Traccia. n° guasti per anno = (n° guasti)/(n° anni) = 0.16
n° anni per guasto = (n° anni)/(n° guasti) = 1/(n° guasti per anno) = 1/0.16 = 6.25
ma 16% è un arrotondamento, per cui: 0.155 ≤ n° guasti per anno ≤ 0.165 → … ≤ 1/(n° guasti per anno) ≤ …
Quindi la conclusione corretta potrebbe essere che …

e10 Usando lo script del quesito 15 verifica, analogamente a quanto si è fatto per la divisione, che migliorando la precisione con cui approssimo x e y possono migliorare quanto voglio la precisione del risultato della moltiplicazione di x per y e dell'elevamento di x alla y.

e11 Per ciascuna delle seguenti coppie di termini individua per quali valori di x e di y sono equivalenti [traccia: prova a dare a x e y i valori: -1, 0, 1]
$x^{1/2}·y^{1/2}$ e $(xy)^{1/2}$ $x^{1/3}·y^{1/3}$ e $(xy)^{1/3}$ 4/(2/x) e 2/x

e12 Dispongo delle formule U = A/(4B) e V = C/(6B) che mettono in relazione alcune grandezze. Devo effettuare per più valori di A, B e C il calcolo di U+V, di U·V e di U/V. Utilizzando opportunamente le regole di riscrittura (5.5)-(5.8), trasforma le formule seguenti in modo che mi consentano di svolgere i calcoli battendo sulla CT il minor numero possibile di tasti di operazione:
U+V = A/(4B)+C/(6B) U·V = A/(4B)·C/(6B) U/V = A/(4B) / (C/(6B))

e13 Per costruire una riga graduata occorre operare delle suddivisioni di segmenti in parti uguali. Ma come si può fare ciò se non si dispone già di un'altra riga graduata con cui effettuare le misure? Le figure seguenti illustrano, ordinatamente, come si può suddividere un segmento AB in 10 parti uguali disponendo di un segmento PQ e facendo opportune costruzioni geometriche. Spiega a parole il procedimento impiegato.

1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini: *retta dei numeri* (§2), *numeri uguali* (§2, §4), *numeri limitati* (§3), *numeri periodici* (§3), *indeterminazione* (§4), *numeri razionali* (§5), *chiuso rispetto a …* (§5), *numeri irrazionali* (§5).

2) Su un foglio da "quadernone", nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").

Per strada

La matematica per i movimenti e i mezzi di trasporto

Scheda **1**

Da casa a scuola

0. Introduzione

In questa unità didattica prenderemo in considerazione la matematica che serve per descrivere e studiare i movimenti. Considereremo sia gli spostamenti lungo percorsi stradali, sia i movimenti che vengono generati o trasformati da un mezzo di trasporto. Vedremo, anche, come la matematica ci possa permettere di collegare questi aspetti *geometrici* a problemi importanti per usare consapevolmente un mezzo di trasporto, come quello del comportamento da tenere al variare della pendenza della strada o quello della sicurezza stradale.

Alcuni aspetti più strettamente matematici verranno man mano approfonditi nell'u.d. *La Matematica e lo Spazio.*

1. Scale, distanze, direzioni, spostamenti

Partiamo da un problema familiare. Lo studente Otto Bus ogni mattina prende un autobus che lo porta dalla località in cui abita alla cittadina in cui è ubicata la scuola; poi percorre a piedi la strada dalla fermata di arrivo alla scuola. In *figura 1* è riprodotta parte di una carta stradale che contiene sia la casa di Otto che la scuola.

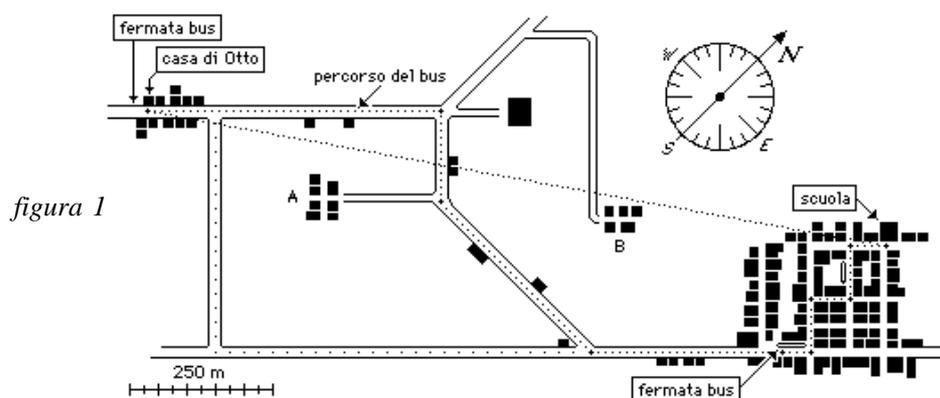



figura 1

1 Sulla cartina è indicata la ***scala grafica***. Misura la lunghezza (arrotondata ai millimetri) del tratto che rappresenta 250 m ed esprimi sotto forma di rapporto la ***scala numerica*** (figura → realtà), cioè il fattore di ingrandimento per passare dalle misure sulla figura alle misure reali.

scala (figura → realtà) = 250 m /(... mm)

Qual è il valore numerico di questo rapporto? *scala* (figura → realtà) = ...

Un compagno di classe di Otto abita nella località indicata con A, un altro nella località B. Per chi, fra Otto e questi compagni, è minore la ***distanza*** della scuola da casa?

Se intendiamo la distanza *in senso temporale*, dobbiamo rispondere: per Otto. Infatti Otto ha la fermata dell'autobus sotto casa mentre da A e da B occorre percorrere un bel pezzo a piedi prima di arrivare sulla strada in cui passa l'autobus.

Se intendiamo la distanza *lungo la strada*, dobbiamo rispondere che essa è minore per l'alunno che abita in A. La distanza *in linea d'aria* è invece minore per l'alunno che abita in B.

2 Calcola la distanza in linea d'aria tra la casa di Otto e la scuola (arrotondata ai metri).

distanza sulla figura in mm = ... *scala (figura in mm → realtà in m)* = 250/...

distanza reale in m = ... ·*scala* = ... ·*250/...* = ...

3 Calcola la distanza lungo la strada tra la fermata in cui Otto prende il bus e la fermata di arrivo, cioè la lunghezza del cammino percorso dall'autobus. Ti conviene calcolare le lunghezze reali di ciascun tratto rettilineo e poi sommarle o fare prima la somma delle lunghezze sulla figura e poi moltiplicare questo valore per la scala?

Si può osservare che il solo percorso dell'autobus è maggiore della distanza in linea d'aria casa-scuola.

4 Se l'autobus seguisse un percorso parzialmente diverso, svoltando a destra al primo incrocio dopo la casa di Otto (strada tratteggiata meno fittamente), secondo te percorrerebbe più o meno strada?
[rispondi senza fare misure e calcoli]

5 Verifica la congettura calcolando la lunghezza di questo percorso.

6 Si poteva verificare la congettura senza fare misure e calcoli?
[aiutati con la *figura 2*, in cui P1-X-Y-P2 e P1-U-V-W-P2 sono i due tratti di percorso alternativi, e utilizza la proprietà che la somma delle lunghezze di due lati di un triangolo è maggiore della lunghezza del terzo]

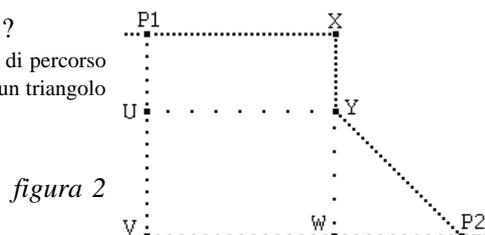



figura 2

Sia che segua il solito tragitto, sia che segua il nuovo, il bus *si sposta* comunque dal punto P1 (incrocio dopo la casa di Otto) al punto P2 (incrocio prima dell'ingresso nella cittadina). Quando non si vuole descrivere tutta la *traiettoria* percorsa da un oggetto in movimento ma si vuole descrivere solo come la posizione di arrivo è cambiata rispetto a quella di partenza, si usa il concetto di ***spostamento***:

lo spostamento per andare da un punto P a un punto Q è caratterizzato da due elementi:
- la ***direzione*** con cui da P si punta verso Q
- la ***distanza*** in linea d'aria di P da Q.

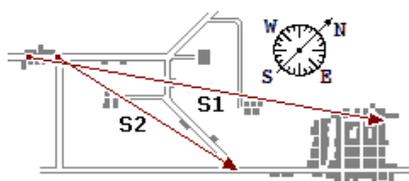



figura 3

Gli spostamenti possono essere rappresentati con frecce: nella *figura 3* la freccia S1 rappresenta lo spostamento casa-scuola di Otto, la freccia S2 rappresenta lo spostamento da P1 a P2 del bus. Nella cartina le direzioni possono essere individuate riferendosi ai punti cardinali raffigurati. Ad esempio quando il bus passa davanti alla casa di Otto è diretto nella direzione NE (nord-est).

Vediamo come possiamo *determinare la direzione di S1*, cioè dello spostamento casa-scuola.

Possiamo porre una squadretta nella posizione **1** (*figura 4*), in modo che uno dei due lati che formano l'angolo retto si sovrapponga alla freccia S1. Quindi poniamo una riga nella posizione **2** (al posto della riga si può usare un'altra squadra) e facciamo scorrere la squadra, fino ad arrivare alla posizione **3**. Il lato della squadra che era sovrapposto a S1 durante il movimento ha mantenuto la stessa inclinazione, per cui ora ci consente di individuare la direzione di S1. Come si vede meglio nell'ingrandimento, una freccia passante per il centro del cerchio graduato e diretta come S1 passa per la terza divisione in cui è suddiviso il settore che va da E a N.

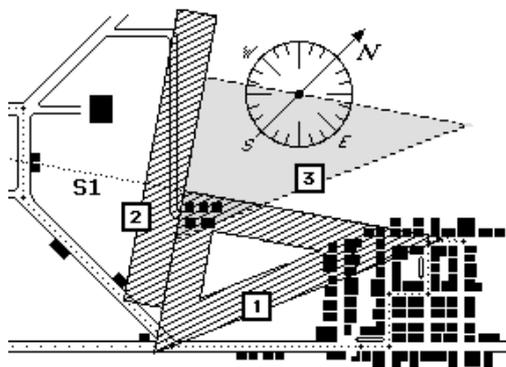
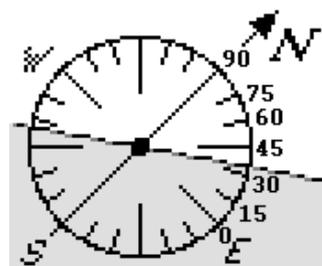



figura 4

Le tacche sono distanziate di 15° l'una dall'altra (infatti da E a N vi sono 6 divisioni). Quindi la direzione è compresa tra 30°E→N e 45° E→N; possiamo approssimarla meglio dicendo che è circa 35° E→N (direzione ruotata di circa 35° verso nord rispetto alla direzione est).

7 Trova la direzione dello spostamento S2 (lavora sulla figura 1 impiegando una riga e una squadra o due squadre; al posto di una squadra puoi impiegare un libro o un altro oggetto che abbia due spigoli consecutivi perpendicolari).

direzione di S2: . . . .

8 In *figura 5* sono tracciati due punti P1 e P2 e una freccia che rappresenta lo spostamento S che porta da P1 a P2. Traccia i punti Q2, T2 e V2 in cui si arriva partendo da Q1, T1, V1 e "applicando" lo spostamento S (cioè effettuando cambiamenti di posizioni descrivibili con frecce uguali sia in lunghezza che in direzione a quella che va da P1 a P2).

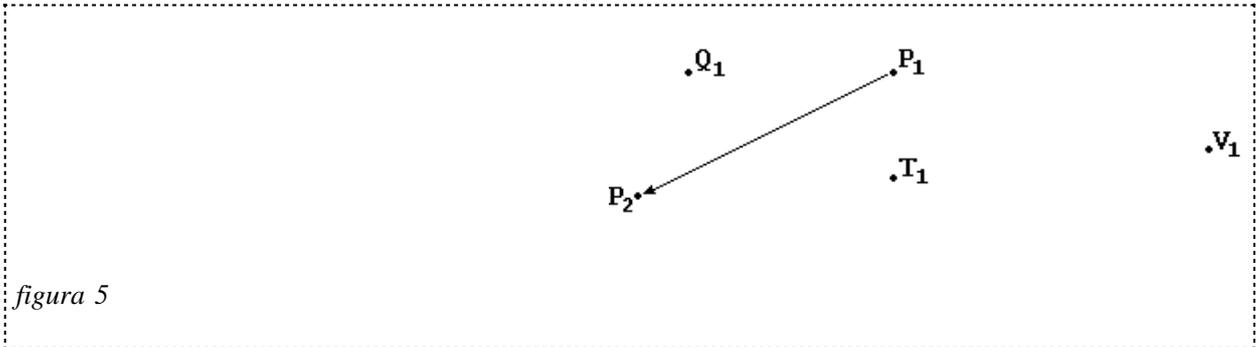



figura 5

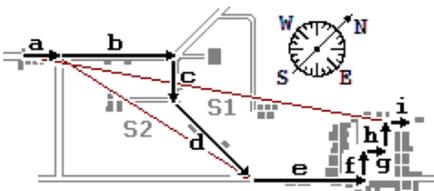



figura 6

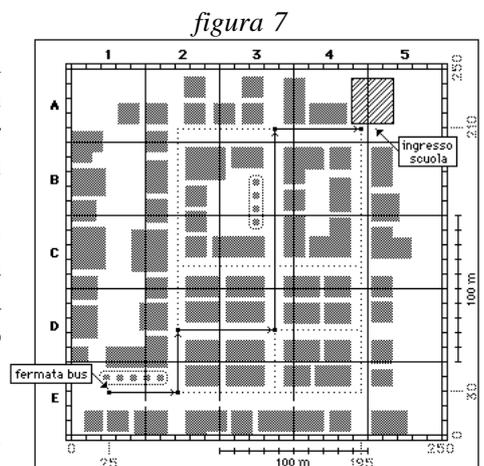
La traiettoria seguita da Otto è composta da tanti tratti rettilinei, per cui la sequenza di spostamenti *a, b, c, d, e, f, g, h, i* rappresentati in *figura 6* la descrive in maniera esauriente.

S1 descrive il *cambiamento di posizione complessivo* che risulta dalla successione degli spostamenti *a, b, c, d, e, f, g, h, i*. Anche la successione di spostamenti *a*, S2, *e, f, g, h, i* dà luogo allo spostamento complessivo S1.

2. Uso delle coordinate

figura 7

Il tragitto che Otto percorre a piedi può essere esaminato più in dettaglio servendosi di una cartina meno ridotta (→ *figura 7*). In questa cartina non sono indicati i cosiddetti "punti cardinali". Per indicare gli spostamenti possiamo riferirci alle direzioni "orizzontale a destra", "orizzontale a sinistra", "verticale in basso", "verticale in alto". Ad esempio il primo tratto di strada percorso da Otto va da una posizione del riquadro E1 a circa la stessa posizione del riquadro E2 e, poiché un riquadro è largo (nella realtà) 50 m, possiamo dire che si tratta di uno spostamento orizzontale di circa 50 metri verso destra.

Come possiamo descrivere lo spostamento complessivo, dalla fermata del bus all'ingresso della scuola?

In prima battuta possiamo osservare che Otto si sposta dal riquadro E1 al riquadro A4, cioè di circa 3 riquadri a destra e 4 in alto, cioè di circa 150 m a destra e 200 m in alto. Per essere più precisi invece che alle coordinate del tipo A1, B2, …, ci possiamo riferire a coordinate numeriche (→ numeri scritti a tratteggio nella figura 7): Otto è partito circa dal punto (25,30), cioè 25 m a destra rispetto al bordo sinistro della cartina e 30 m in alto rispetto al bordo inferiore.

9 Come puoi descrivere il punto finale di arrivo di Otto? E come lo spostamento fermata-scuola?

Abbiamo, dunque, visto che uno spostamento può essere descritto sia con la coppia di informazioni:

direzione, distanza

sia con la coppia di informazioni:

variazione della coordinata orizzontale, variazione della coordinata verticale.

Nel caso dello spostamento fermata-scuola abbiamo (→ *figura 8* a sinistra):

variazione della coordinata orizzontale = 170, *variazione della coordinata verticale* = 180.

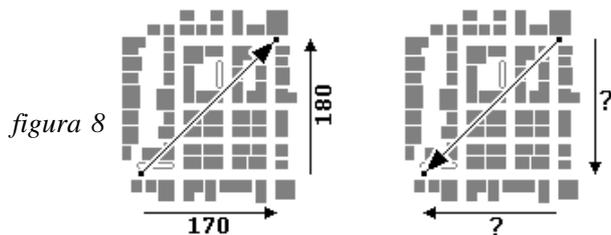



figura 8
10 Come descriveresti lo spostamento opposto, scuola-fermata?

11 Qual è la distanza "lungo la strada" della scuola dalla fermata del bus? E quella della fermata del bus dalla scuola?

Non vi sono traiettorie più brevi per raggiungere la scuola di quella seguita da Otto, cioè della traiettoria E1-E2-D2-D3-A3-A4 (abbiamo indicato, oltre ai riquadri iniziale e finale, quelli in cui avvengono le svolte). Tuttavia, poiché le strade della cittadina si incontrano perpendicolarmente, formando un reticolato, vi sono altri percorsi brevi come quello scelto da Otto:

1	E1	E4	A4				
2	E1	E3	D3	D4	A4		
3	E1	E3	C3	C4	A4		
4	E1	E3	…	…			
5	E1	E2	D2	D4	A4		
6	E1	E2	D2	D3	C3	…	…
7	*E1*	*E2*	*D2*	*D3*	*A3*	*A4*	
8							
9							
10							

basta che, a partire dalla fermata del bus, si proceda percorrendo le strade orizzontali solo verso destra e le strade verticali solo verso l'alto, cioè avvicinandosi sempre alla scuola.

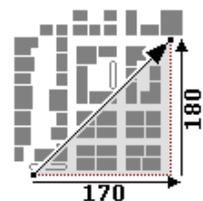
12 Quante sono le traiettorie che comportano la minima percorrenza?
[Aiutati completando la tabellina a fianco, in cui sono già parzialmente riportate alcune traiettorie "minime"; la riga in corsivo rappresenta la traiettoria seguita da Otto]

Dunque, *se le strade sono parallele ai bordi*, abbiamo:

(**2.1**) *distanza lungo la strada* = |*variaz. della coord. orizzontale*| + |*variaz. della coord. verticale*|

Se voglio conoscere la *distanza "in linea d'aria"* fermata-scuola e non dispongo di una riga, come posso procedere? Posso ad es. disporre una striscia di carta lungo lo spostamento fermata-scuola e, con una matita o con delle piegature, segnare su di essa la posizione della fermata del bus e quella dell'ingresso della scuola. Spostando la striscia lungo uno dei bordi posso poi individuare la corrispondente distanza in metri.

13 Opera in questo modo in figura 7, sulla riproduzione della cartina. Quale valore (arrotondato alle decine di metri) trovi?

14 Qualcuno di voi sa escogitare un modo per trovare questa distanza senza operazioni di tal genere, ma servendosi delle sole coordinate della fermata del bus e dell'ingresso della scuola? [osservate la figura a fianco]

15 Trova con questo metodo la distanza in linea d'aria (arrotondata alle decine si metri) e confrontala con il valore trovato con il quesito 13.

variazione della coordinata orizzontale = 170 *suo quadrato* = …
variazione della coordinata verticale = 180 *suo quadrato* = …
somma dei due quadrati = … *radice quadrata di tale somma* = …

16 Scrivi una sequenza di tasti che ti permetta di calcolare con una CT tale distanza (a partire dai dati 170 e 180) senza annotare sulla carta risultati intermedi.

La proprietà che abbiamo impiegato, cioè il ***teorema di Pitagora*** (→ *figura 9*), può essere espressa nella forma:

(**2.2**) $ipotenusa^2 = cateto_1^2 + cateto_2^2$ ovvero:

(**2.3**) $ipotenusa = \sqrt{(cateto_1^2 + cateto_2^2)}$

dove con *ipotenusa*, $cateto_1$ e $cateto_2$ abbiamo indicato le misure delle lunghezze dell'ipotenusa e dei due cateti in una fissata unità di misura.

figura 9

Il quesito 15 ci conferma la validità di questa proprietà: la misura diretta della distanza in linea d'aria (ipotenusa) è uguale a quella che si ottiene utilizzando (2.3). Non è, tuttavia, una conferma definitiva: abbiamo considerato non misure "esatte", ma misure approssimate alle decine di metri; poi abbiamo verificato la proprietà solo in un caso particolare. Comunque tutte le verifiche sperimentali su figure a forma di triangolo rettangolo disposte su superfici piane hanno sempre confermato questa relazione.

Nel quesito **e**3 è presentato un ragionamento che dimostra in generale questa proprietà (la parola *teorema* indica, appunto, che questa proprietà può essere dimostrata).

17 Sotto è raffigurato un triangolo rettangolo e tre righe millimetrate disposte lungo i suoi lati. Con le righe troviamo che le misure (in mm) dei cateti cadono negli intervalli di indeterminazione [53, 54] e [30, 31].
(*a*) Usando (2.3) trova l'intervallo di indeterminazione in cui cade l'ipotenusa.
(*b*) Verifica se c'è contraddizione tra l'intervallo così trovato e quello che si ottiene misurando direttamente l'ipotenusa.

$53 \le cateto_1 \le 54$ $\quad 2809 \le cateto_1^2 \le 2916$

$\ldots \le cateto_2 \le \ldots$ $\quad \ldots \le cateto_2^2 \le \ldots$

Con il teorema di Pitagora:

$\sqrt{(2809 + \ldots)} \le ipotenusa \le \sqrt{(2916 + \ldots)}$

$\ldots \le ipotenusa \le \ldots$

Con la misura diretta:

$\ldots \le ipotenusa \le \ldots$

3. Descrizioni dei percorsi

18 Supponete di essere nella località A (→ figura 1). State chiacchierando con degli amici quando arriva un'auto. L'uomo al volante vi chiede come può raggiungere la località B. Come gli rispondete?

19 A lato è riprodotta la mappa di un tesoro; è tracciato il percorso che si deve seguire per raggiungerlo partendo dal molo raffigurato, nell'unica insenatura dell'isola che permette l'attracco. I lati del reticolato sono ampi circa 10 m, cioè circa 10 passi. Un cercatore di tesori approda all'isola senza disporre della mappa. Ha solo tre pergamene, un po' rovinate, contenenti l'indicazione del percorso:

90N	70S
50E	70W
30S	40N
120E	
70W	

0,90	
50,0	-70,0
0,-30	0,40
-70,0	

S	S	
90	120	
D	D	D
50	90	70
D	D	D
30	70	40

figura 10

(a) Osserva le tre pergamene (riprodotte sopra), cerca di capirne il significato e completale.
(b) Usando la 1ª o la 2ª pergamena sapresti determinare la posizione del tesoro rispetto al punto di partenza senza tracciare tutto il percorso?
(c) Quali delle tre descrizioni del percorso diresti che usano indicazioni assolute, quali relative? Perché?

Se operiamo in ambiente Windows, vediamo come possiamo *descrivere con un programma degli spostamenti nelle direzioni dei quattro punti cardinali*.

Prima di far ciò consideriamo un semplice programma che illustra l'uso della seguente istruzione QBasic:

LOCATE *TermineNumerico*, *TermineNumerico*

L'azione comandata da **LOCATE** *t1* (se *m* e *n* sono i valori, arrotondati agli interi, dei termini *t1* e *t2*) è quella di collocare la *penna di scrittura* del calcolatore sulla riga di caratteri *m*-esima, alla *n*-esima colonna.

Ecco il programma e un suo esempio d'uso:

figura 11

Con CLS viene pulito lo schermo da even-tuali scritte.

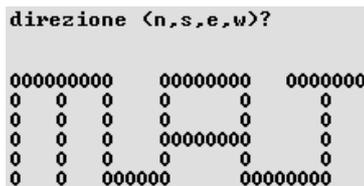
Alla prima esecuzione della 5ª riga il prompt "riga,colonna?" viene scritto a partire dal 50° posto della 1ª riga dello schermo; infatti inizialmente **i** vale 1.

L'utente assegna a **R** il valore 2 e a **C** il valore 1. Il PRINT scrive O al 1° posto della 2ª riga.
i=i+1 aumenta **i** a 2, così che il successivo prompt compare sulla 2ª riga, sempre al partire dal 50° posto.
…

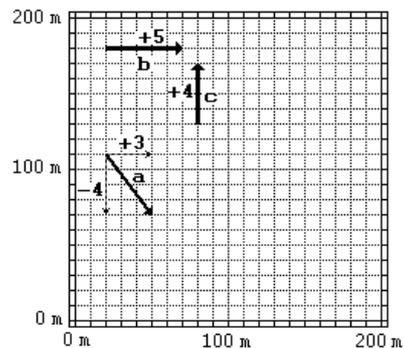
Quando l'utente tenta di assegnare a **R** il valore 0 il calcolatore blocca l'esecuzione e segnala il messaggio d'errore "Invalid function call" o "Chiamata di funzione non valida" indicando che l'errore è avvenuto durante l'esecuzione dell'istruzione LOCATE: non è possibile chiedere il posizionamento della penna di scrittura fuori dallo schermo (la prima riga è la riga 1).

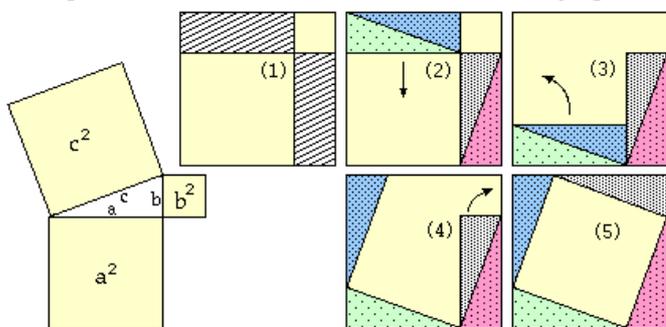
Il programma, di cui qui puoi esaminare (e caricare) il testo, usa l'istruzione LOCATE per tracciare degli spostamenti (indicati riferendosi ai "punti cardinali").

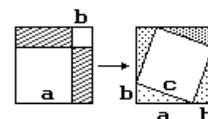
Vediamo, sotto, che cosa appare sullo schermo dopo che ai prompt si risponde nel modo indicato a destra.

```
Riga,Colonna primo punto (1<=C<=50,3<=R<=23)? 10,1
direzione (n,s,e,w)? n   numero passi? 5
direzione (n,s,e,w)? e   numero passi? 4
direzione (n,s,e,w)? s   numero passi? 5
direzione (n,s,e,w)? n   numero passi? 5
direzione (n,s,e,w)? e   numero passi? 4
direzione (n,s,e,w)? s   numero passi? …
direzione (n,s,e,w)? …   numero passi? 6
direzione (n,s,e,w)? n   numero passi? 5
direzione (n,s,e,w)? e   numero passi? 8
direzione (n,s,e,w)? s   numero passi? 3
direzione (n,s,e,w)? w   numero passi? …
direzione (n,s,e,w)? e   numero passi? …
direzione (n,s,e,w)? s   numero passi? …
direzione (n,s,e,w)? …   numero passi? 8
direzione (n,s,e,w)? …   numero passi? …
direzione (n,s,e,w)? …   numero passi? …
direzione (n,s,e,w)? e   numero passi? 6
```

20 Inizialmente ci si posiziona al 1° posto della riga 10. Poi si avanza di 5 passi verso N (viene tracciata la prima gamba della M di MAT. …. Si finisce con lo spostamento di 6 passi verso E (viene completata la T). *Completa* la descrizione degli spostamenti (se vuoi, puoi controllare le risposte usando il programma).

4. Esercizi

e1 Nella figura a lato sono raffigurati tre spostamenti *a*, *b* e *c*.
- Traccia una freccia che rappresenti lo spostamento complessivo che si ottiene componendo ordinatamente questi tre spostamenti.
- Come potresti descrivere numericamente questo spostamento?
- Prova a comporre *a*, *b*, *c* in ordine diverso e raffigura lo spostamento complessivo.
- Come potresti calcolare lo spostamento complessivo senza fare disegni?
- Potevi concludere che lo spostamento complessivo è immutato ragionando solo sulla descrizione numerica dei tre spostamenti?

e2 Calcola con una riga millimetrata la distanza tra le posizioni che corrispondono al vertice in alto a sinistra e al vertice in basso a destra della cartina dell'esercizio precedente (procedi come nel quesito 2; ma, attento, la scala di questa cartina è diversa!). Confronta questo valore con quello che puoi ottenere (con una CT) procedendo come nel quesito 15.

e3 Nel disegno (1) seguente è rappresentato il pavimento di una stanza. È di forma quadrata e comprende due preziose lastre di marmo scuro di uguali dimensioni disposte come in figura. Il nuovo proprietario dell'appartamento vuole rifare il pavimento cercando di riutilizzare le due lastre. Fa allora qualche schizzo - disegni (2)-(5) - per studiare la possibilità di disporre al centro della stanza un quadrato di marmo chiaro facendo meno tagli possibile sulle due lastre.

La parte di pavimento non occupata dal marmo scuro è composta da due quadrati. Nella nuova configurazione assume la forma di un unico quadrato ma, naturalmente, non cambia estensione. Perché il proprietario dell'appartamento, con questo ragionamento, ha fatto anche una dimostrazione del teorema di Pitagora (→ disegno a sinistra)?

Traccia. Indica con a e b le misure dei lati dei due quadrati iniziali. Lo spazio per il marmo bianco ha quindi estensione a^2+b^2. Indica con c la misura del lato del quadrato che questo spazio assume nella configurazione finale, lato che è anche l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti a e b. L'estensione di questo quadrato è uguale a ... Perciò a^2+b^2 = ...

e4 Con il programma in JavaSript a cui puoi accedere da **qui** o con quello in QB accessibile da **qui** puoi analizzare il significato degli ***operatori logici***, ottenendo esiti simili al seguente:

```
Stampo se sono vere o false le condizioni P (x=y), Q (z=w)
e le condizioni NOT P,  P AND Q,  P OR Q
                        P    Q    NOT P   P AND Q   P OR Q
x,y? 2,2  z,w? 2,2      V    V      F        V         V
x,y? 2,2  z,w? 2,1      V    F      F        F         V
x,y? 2,1  z,w? 2,2      F    V      V        F         V
x,y? 2,1  z,w? 2,1      F    F      V        F         F
```

Gli operatori logici sono comodi per rappresentare condizioni che non sono rappresentabili con un'unica equazione o un'unica disequazione. Ad es. 0<x<10 è una abbreviazione della condizione "x è maggiore di 0 e minore di 10", che può essere espressa con: 0<x **AND** x<10 o: x<10 **AND** x>0 o … . Infatti *P* **AND** *Q* è vera solamente nel caso in cui siano vere sia *P* che *Q* (→ penultima colonna delle uscite sopra riportate). Nel linguaggio comune la congiunzione "*e*" a volte viene usata nello stesso significato di **AND**: in «se Gianni ha fretta e è senza auto, gli presto la mia» si intende dire che se sono vere entrambe le condizioni ("Gianni ha fretta", "Gianni è senza auto") l'auto viene prestata. In genere "*e*" ha, invece, significati diversi.
(*a*) «se prende l'ascensore *e* sale al 6° piano trova l'ufficio a cui deve rivolgersi»: basta che la persona compia le due azioni di "prendere l'ascensore" e "salire al 6° piano" perché trovi l'ufficio o occorre che compia le due azioni in un certo ordine? [prova a leggere la frase invertendo le condizioni «prende …» e «sale…»]
(*b*) «se x è minore di 1 *e* positivo, 1/x è maggiore di 1» può essere espressa con «se sono vere le condizioni "x è minore di 1" e "x è positivo" allora …; puoi trasformare in maniera analoga «se la maglia è gialla *e* rossa si tratta di un giocatore della Roma»?
(*c*) *P* **OR** *Q* è falsa nel caso in cui siano false sia *P* che *Q*, è vera negli altri casi. Nelle seguenti frasi la congiunzione "*o*" è usata nello stesso significato di **OR**
- «se hai l'ombrello *o* indossi l'impermeabile ti bagnerai poco»
- «se noleggia una Alfa *o* se noleggia una Golf spende 120 € al giorno»
Nota. In *JavaScipt* gli operatori logici sono indicati in modi diversi da quelli qui indicati. Quali?

e5 Il programma in JavaSript a cui puoi accedere da **qui** consente di studiare quando è vera la condizione *P* **AND** *Q* **AND** *R*. Prova ad usarlo. Poi modificalo per studiare *P* **OR** *Q* **OR** *R* e *P* **AND** *Q* **OR**.

e6 In un termine aritmetico che contenga più operazioni posso spesso omettere le parentesi: le operazioni sono eseguite a partire da sinistra a meno che non si incontrino operazioni con diverse ***priorità***. Ad es. 3+2*5^2 viene interpretato come 3+(2*(5^2)) in quanto gli operatori che compaiono sono considerati con il seguente ordine di priorità: ^, *, +. Analogamente in una condizione che contenga più equazioni o disequazioni posso spesso omettere le parentesi utilizzando le priorità tra gli *operatori logici* **NOT**, **OR** e **AND**. Stabilisci l'ordine di priorità tra questi operatori sulla base della seguente tabella, ottenuta con un programma simile a quello di **e5**. Per rendere più leggibili le condizioni ed evitare di commettere errori conviene, comunque, usare le parentesi senza ricorrere alle priorità.

```
condizione falsa: 0    condizione vera: -1
                               NOT P AND Q    NOT (P AND Q)   (NOT P) AND Q
P:-1      Q:-1                   0               0              0
P:-1      Q: 0                   0              -1              0
P: 0      Q:-1                  -1              -1             -1
P: 0      Q: 0                   0              -1              0
                         P OR Q AND R      (P OR Q) AND R      P OR (Q AND R)
P:-1   Q:-1    R:-1     -1                  -1                  -1
P:-1   Q:-1    R: 0     -1                   0                  -1
P:-1   Q: 0    R:-1     -1                  -1                  -1
P:-1   Q: 0    R: 0     -1                   0                  -1
P: 0   Q:-1    R:-1     -1                  -1                  -1
P: 0   Q:-1    R: 0      0                   0                   0
P: 0   Q: 0    R:-1      0                   0                   0
P: 0   Q: 0    R: 0      0                   0                   0
```

e7 Anche con i ***fogli elettronici*** si possono usare *operatori logici*. In genere i fogli elettronici usano 1 come "vero" e 0 come "falso". Gli argomenti degli operatori logici devono essere racchiusi tra parentesi e separati con una virgola o un punto e virgola a seconda del tipo di foglio di calcolo; ad esempio non si scrive A1 OR A2 ma OR(A1,A2) o OR(A1;A2). Prova a realizzare con un foglio elettronico la tabella sotto raffigurata (sono riprodotti sia lo stato formule che lo stato valori del foglio) e prova a usare il foglio elettronico per predisporre tabelle simili a quella del quesito precedente.

Nota. Nella riga 1 non sono state messe costanti numeriche o formule, ma stringhe, che servono per la lettura della tabella. Le formule sono state scritte nella riga 2; poi sono state riprodotte nelle righe successive; i riferimenti delle celle sono stati modificati automaticamente dal foglio elettronico.

	A	B	C	D	E
1	A	B	NOT A	A AND B	A OR B
2	1	1	=Not(A2)	=And(A2;B2)	=Or(A2;B2)
3	1	0	=Not(A3)	=And(A3;B3)	=Or(A3;B3)
4	0	1	=Not(A4)	=And(A4;B4)	=Or(A4;B4)
5	0	0	=Not(A5)	=And(A5;B5)	=Or(A5;B5)

	A	B	C	D	E
1	A	B	NOT A	A AND B	A OR B
2	1	1	0	1	1
3	1	0	0	0	1
4	0	1	1	0	1
5	0	0	1	0	0

e8 Redigi due programmi che generino le figure a fianco.

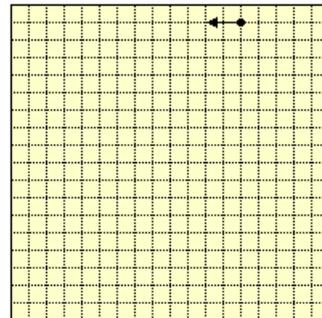
```
OOOOOOOOOO   O
O        O   OO
O        O   O O
O        O   O  O
O        O   O   O
OOOOOOOOOO   OOOOOO
```

e10 Redigi due programmi che generino le figure a fianco.

```
OOOOOOOOOO   OOOOOO
OOOOOOOOOO   OOOOO
OOOOOOOOOO   OOOO
OOOOOOOOOO   OOO
OOOOOOOOOO   OO
             O
```

e9 A fianco è riportato un programma con un esempio di uscite. Quali sono le uscite se come input batto la coppia 1,2? E se batto 2,1?

```
INPUT maxi, maxj    ? 2,3
FOR i=1 to maxi     1 ** 1
FOR j=1 to maxj     1 ** 2
PRINT i;"**";J      1 ** 3
NEXT                2 ** 1
NEXT                2 ** 2
                    2 ** 3
```

e11 I movimenti lungo il pavimento dei robot impiegati in una particolare fabbrica sono programmabili in una opportuna estensione del linguaggio QB che contiene le istruzioni: **AV** *NuMetri* e **RO** *NuGradi* dove *NuMetri* deve essere un numero non negativo e *NuGradi* un numero qualunque. L'azione comandata da **AV** *NuMetri* è l'avanzamento di *NuMetri* metri. Quella comandata da **RO** *NuGradi* è la rotazione su se stesso di *NuGradi* gradi (la rotazione è antioraria se *NuGradi* > 0, oraria altrimenti). Sulla figura a lato sono rappresentate la posizione e la direzione iniziali di un robot. I quadretti hanno lato di 1 m. Traccia le traiettorie che il robot compirebbe se fosse programmato nei seguenti modi: (1) **FOR** i=1 **TO** 4: **AV** 6: **RO** 90: **NEXT**
(2) **FOR** i=1 **TO** 8: **AV** 7: **RO** 45: **NEXT** (3) **FOR** i=1 **TO** 3: **AV** 8: **RO** 120: **NEXT**

e12 Considera il programma in QB boh1.txt a cui puoi accedere cliccando; cerca di prevedere che cosa appare sullo schermo alla fine dell'esecuzione. Verifica poi la tua previsione eseguendolo.

e13 Come sopra per boh2.txt e boh3.txt (l'istruzione COLOR imposta il colore delle uscite: vedi l'help).

1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini: *spostamento* (dopo q.6 e dopo q.9), *teorema di Pitagora* (dopo q. 16), *operatori logici* (q.e4).

2) Su un foglio da "quadernone", nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").

La matematica e lo spazio

I modelli geometrici

Scheda **1**

Traslazioni, vettori e distanze

0. Introduzione

Generalizziamo le considerazioni svolte nella prima scheda dell'u.d. *Per strada.* Non ci riferiremo più a carte stradali, a posizioni in una città, a movimenti lungo una strada, … ma a superfici generiche, a punti, a linee generate da un punto in movimento, …. In altre parole vogliamo considerare uno spazio astratto, considerare definizioni e proprietà svincolate da particolari situazioni,… Ciò avrà un duplice vantaggio.

Da una parte, potremo ragionare più liberamente, ad esempio senza tener conto dei problemi di approssimazione, non preoccupandoci del fatto che le strade possono non essere perfettamente piane, trascurando la presenza di piccole asperità,… Dall'altra, le proprietà studiate potranno essere applicate a molte altre situazioni, non solo alle cartine stradali.

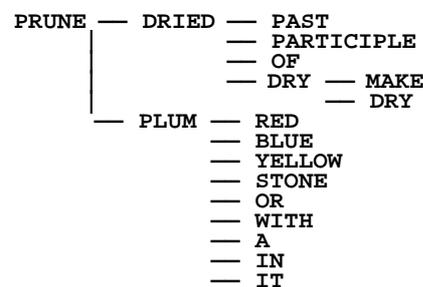
1. Il piano cartesiano

Per ora vogliamo considerare solo posizioni, movimenti, … che avvengono su superfici piane. Ma che vuol dire *superficie piana*? Quando usiamo questo termine abbiamo in mente dei *prototipi*, come la parte superiore di un tavolo, una piazza piatta e con il fondo liscio, la parete di un muro, la superficie di uno stagno, …. E` questo il modo in cui impariamo il significato di gran parte delle parole che usiamo.

Provate a cercare su un *dizionario* il significato di *piano*, *piatto*, …. Troverete delle spiegazioni insoddisfacenti o che rimandano l'una all'altra, oltre, appunto, a qualche esempio chiarificatore, che funge da prototipo. Un dizionario non può definire tutto, ma si deve servire di un certo numero di parole il cui significato viene assunto come conosciuto dall'utente.

Consideriamo ad es. un particolare dizionario della lingua inglese. Alla fine del dizionario è riportato come "The defining vocabulary" un elenco di circa 2000 parole conoscendo le quali è possibile comprendere le spiegazioni dei significati di tutte le altre.

- Se ad esempio cerchiamo *prune* troviamo «dried plum».
- Cerchiamo *dried* e troviamo «past participle of dry».
- Il significato di *participle*, di *past* e di *of* non è descritto esaurientemente dal dizionario (ci sono dei "giri di parole" e degli esempi); infatti si tratta di parole che fanno parte del "defining vocabulary" (sono *nodi finali* nel grafo a fianco). I loro corrispondenti italiani sono *participio*, *passato* e *di*.
- Per il verbo *dry* troviamo «make dry».
- Il verbo *make* e l'aggettivo *dry* fanno parte del "defining vocabulary". I loro corrispondenti italiani sono il verbo *fare* (*rendere*, …) e l'aggettivo *secco*.

```
PRUNE — DRIED — PAST
              — PARTICIPLE
              — OF
              — DRY — MAKE
                    — DRY
      — PLUM  — RED
              — BLUE
              — YELLOW
              — STONE
              — OR
              — WITH
              — A
              — IN
              — IT
```

- Per *plum* troviamo «red, blue-red or yellow fruit with a stone in it». Le parole presenti in questa definizione fanno tutte parte del "defining vocabulary". La traduzione è «frutto rosso, blu-rosso o giallo con dentro un nocciolo».

1 Hai capito il significato di *prune*? Come tradurresti in italiano *prune*?

Per definire il nostro generico spazio piano in modo non ambiguo abbandoniamo il dizionario e utilizziamo i numeri, oggetti matematici di cui, ormai, abbiamo precisato in modo abbastanza chiaro il significato.

Abbiamo già considerato la *retta dei numeri* come modello matematico delle traiettorie rettilinee (di cui abbiamo come prototipi i raggi di luce, la traiettoria di un sasso lasciato cadere da una certa altezza, un filo teso, …): un punto, cioè una posizione della traiettoria, viene identificato con un numero reale (→ scheda 2 de *I numeri*). Ora possiamo definire come modello matematico delle superfici piane l'insieme delle coppie (x, y) di numeri reali, che chiameremo ***piano numerico*** o, più semplicemente *piano.* L'idea è abbastanza naturale: non è altro che una generalizzazione dell'uso delle coordinate nelle carte geografiche. Come alla retta numerica abbiamo associato l'idea intuitiva di una scala graduata su cui si possono tracciare tacche man mano più fitte, così al piano numerico associamo l'*idea intuitiva* di un reticolato su cui, con lenti man mano più potenti, si possono andare a scoprire quadrettature di lato man mano più piccolo.

Nella *figura 1* sono raffigurate localizzazioni man mano più precise del *punto* (x, y) con x=2.8763… e y=1.1635…. Con lenti opportunamente potenti possiamo conoscere quante cifre vogliamo di x e di y.

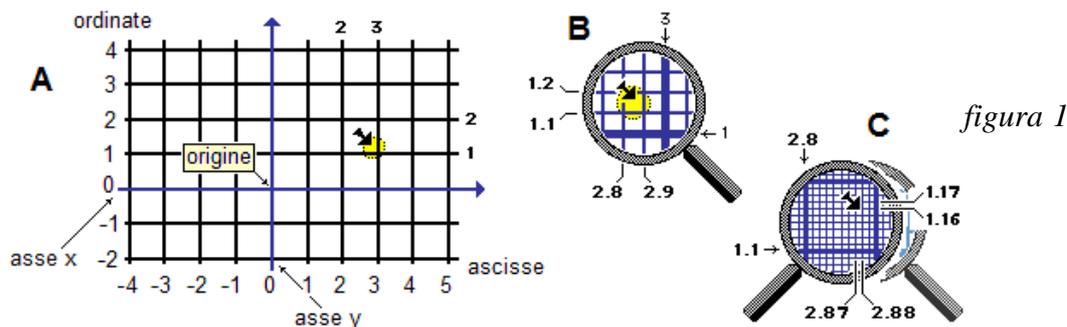
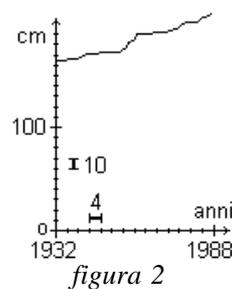



figura 1

Rappresentando graficamente dati relativi a fenomeni di vario genere (→ *figura 2*, dove un punto (x,y) del grafico rappresenta il fatto che "nell'anno x il record in vigore era y centimetri": → scheda 2 di *Le statistiche*), spesso a divisioni orizzontali e verticali uguali vengono associati intervalli numerici di diversa ampiezza, cioè la scala orizzontale e quella verticale vengono scelte differentemente. Invece, quando su un foglio di carta millimetrata o quadrettata si vogliono rappresentare semplicemente delle figure geometriche (punti che rappresentano solo posizioni, linee o altri insiemi di punti che non rappresentano relazioni tra grandezze ma solo traiettorie o altre parti di spazio) la graduazione orizzontale e quella verticale vengono scandite con la stessa "unità di misura": in figura 1 l'intervallo [0,1] è rappresentato da divisioni uguali sia sulle rette graduate verticali che sulle rette graduate orizzontali.

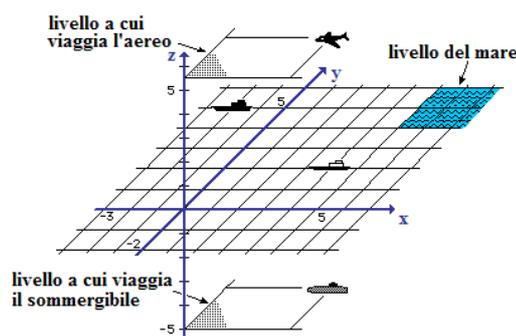
figura 2

La retta graduata orizzontale di ordinata 0 viene chiamata *asse x*. La retta graduata verticale di ascissa 0 viene chiamata *asse y*. Il punto (0,0), che sta all'incrocio di queste due rette, viene chiamato *origine*.

A volte il piano numerico viene chiamato ***piano cartesiano***, a ricordo di *Cartesio*, matematico e filosofo francese vissuto nel XVII secolo che inventò l'uso delle coordinate per dare una descrizione matematica del concetto di spazio.

La retta e il piano vengono chiamati anche, rispettivamente, *spazio a 1 dimensione* (un punto è individuato da *un* numero reale, cioè da una coordinata) e *spazio a 2 dimensioni* (un punto è individuato da *due* numeri reali, cioè da due coordinate).

Se, invece, vogliamo considerare posizioni e movimenti che non stanno su una traiettoria rettilinea o su una superficie piana (ad esempio il volo di un aereo) dobbiamo ricorrere a *tre* coordinate. Ad esempio per indicare la posizione in cui si trova un sommergibile o un aereo possiamo usare due numeri x e y per individuare la posizione sulla superficie del mare e un numero z per individuare la profondità o l'altitudine. Lo *spazio tridimensionale* è l'insieme delle terne (x, y, z) di numeri reali.

2 A fianco è raffigurata una porzione di superficie marina su cui è stato fissato un sistema di riferimento x,y. I numeri associati agli assi rappresentano centinaia di metri

La nave chiara raffigurata ha coordinate x=4, y=2 (dista 400 m dalla linea assunta come asse y e 200 m dalla linea assunta come asse x). Viene usata anche una retta graduata verticale per rappresentare livelli diversi dal livello del mare: asse z. Ad esempio il sommergibile raffigurato, che sta esattamente sotto alla nave chiara, ha, come questa, x=4 e y=2; ha poi z=–5 (500 m sotto il livello marino). *Completa* la tabella che segue.

mezzo	x	y	z
nave chiara	4	2	…
sommergibile	4	2	-5
aeroplano	…	…	…
nave scura	…	…	…

2. Traslazioni e vettori

Nel seguito spesso useremo la seguente convenzione.

Se nel corso di un ragionamento indichiamo un punto con P, con P_1, con P_2, …, allora indichiamo le sue coordinate rispettivamente con x, y, x_1, x_2, … Se invece indichiamo un punto con una lettera diversa, ad esempio con A, con B, …, allora indichiamo le sue coordinate con x_A, x_B, …

Consideriamo i *cambiamenti di posizione.*

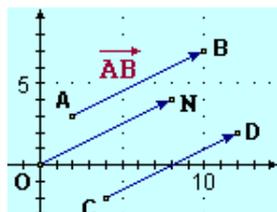



figura 3

Spostandosi da A a B, da C a D o da O a N (*figura 3*) si compie lo stesso cambiamento di posizione. Intuitivamente possiamo descrivere ciò dicendo che le tre *frecce* da A a B, da C a D e da O ad N hanno la stessa direzione e la stessa lunghezza. In fisica la freccia che rappresenta il cambiamento di posizione per andare da A a B viene chiamata *spostamento* e viene indicata con una freccia sovrapposta ad AB, come nel disegno a lato. Due spostamenti vengono considerati *uguali* quando sono frecce con la stessa direzione e la stessa lunghezza.

[**Nota.** In qualche libro di fisica invece di *direzione* si parla di *direzione orientata* e si usa "direzione" come sinonimo di "*inclinazione*". In particolare di due spostamenti che hanno direzioni opposte, come quello che porta A in B e quello che porta D in C (è la "freccia" CD invertita), si dice che hanno la stessa direzione e *verso* opposto]

Ma *che cos'è una freccia*?

Per ricondurci a concetti matematici possiamo rappresentare gli spostamenti, invece che parlando di frecce, riferendoci alle coordinate dei punti di partenza e di arrivo.

Lo spostamento da A a B può essere descritto indicando la ***variazione orizzontale*** x_A-x_B, che indicheremo anche con Δx, e la ***variazione verticale*** y_A-y_B, che indicheremo anche Δy.

[Δx sta per "**d**ifferenza delle x"; infatti Δ è la lettera greca "delta" maiuscola, che si legge come la lettera italiana D]

figura 4

Nel primo caso della *figura 4* abbiamo Δx>0 e Δy>0: spostandosi da A a B aumentano sia la ascissa che l'ordinata. Nel secondo caso abbiamo Δx>0 e Δy<0: spostandosi da P a Q aumenta la ascissa ma diminuisce l'ordinata.

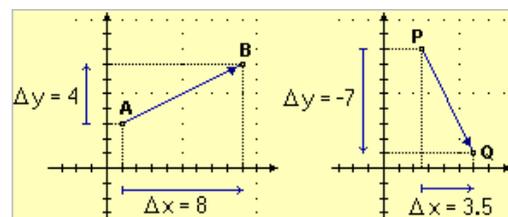
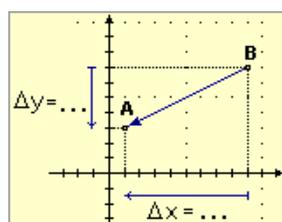



figura 5

3 Quanto valgono Δx e Δy nel caso a sinistra?

Possiamo descrivere il cambiamento di posizione che fa variare la coordinata orizzontale di Δx e la coordinata verticale di Δy come una funzione che dato un punto (x,y) gli associa il punto (x+Δx, y+Δy).

Nel caso a sinistra di fig. 4 abbiamo applicato la funzione (x,y) → (x+8, y+4). Dal punto A = (1,3) si passa al punto B = (1+8,3+4) = (9,7). Anche nel caso a destra abbiamo applicato a C la stessa funzione: C = (4,1) → D = (4+8,1+4) = (12,5)

Nel caso di fig. 5 abbiamo invece applicato la funzione (x,y) → (x-8,y-4). Rispetto alla precedente, questa funzione rappresenta il cambiamento di posizione opposto: (9,7) viene riportato in (1,3).

Queste funzioni vengono dette traslazioni (dal latino *translatio*, che significa "trasporto", "trasferimento"). Più in generale, dati due numeri *h* e *k*, viene detta ***traslazione*** *di passi h,k* la funzione che associa al punto (x,y) il punto (x+*h*, y+*k*).

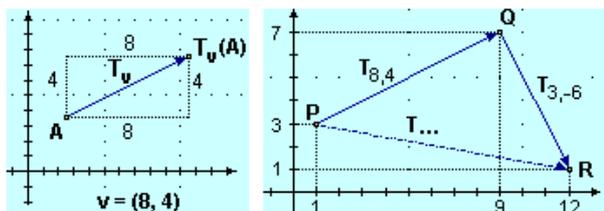
I passi di una traslazione non sono altro che le variazioni Δx (passo "orizzontale") e Δy (passo "verticale") delle coordinate tra i punti in input e i punti in output. La traslazione che porta da un punto A a un punto B ha passi: Δx = x_B-x_A, Δy = y_B-y_A. La coppia (Δx,Δy) viene indicata più brevemente con AB con sovrapposta una **freccia**, come abbiamo visto in fig.3, o con la scrittura **B-A** (il "meno" indica che è una specie di differenza: la "variazione" per andare da A a B), e viene chiamata ***vettore*** **AB**.

In *figura 1* sono raffigurati il punto A, il punto C e l'origine O e i punti che si ottengono da essi con la traslazione di passi 8, 4: A = (2,3) → B = (2+8,3+4) = (10,7), C = (4,-2) → D = (4+8,-2+4) = (12,2), O = (0,0) → N = (0+8,0+4) = (8,4).

I vettori AB, CD e ON sono ***uguali***: sono diversi modi per indicare la traslazione di passi 8,4: x_B-x_A = x_D-x_C = x_N-x_O = 8, y_B-y_A = y_D-y_C = y_N-y_O = 4.

[La parola *vettore* nel linguaggio comune significa "portatore" (ad esempio la persona che effettua la consegna di una merce viene chiamata "il vettore", il razzo impiegato per mettere in orbita un satellite artificiale viene chiamato "razzo vettore", …); deriva dal verbo latino *vehere*, che significa "portare" (dallo stesso verbo derivano: vettura, veicolo, …). È evidente il motivo per cui è stato scelto questo nome per i passi delle traslazioni]

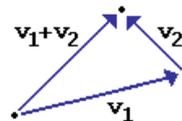
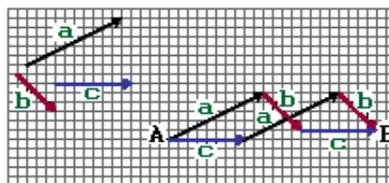
Se *v* è il vettore (*h*,*k*), indicheremo con T_v o con $T_{h,k}$ la traslazione di passi h,k, che chiameremo anche traslazione *determinata* da *v* o traslazione di vettore *v*. Indicheremo con T_v(x,y) il *traslato* del punto (x,y), cioè il punto (x+*h*,y+*k*). Vedi la figura sottostante a sinistra.

I numeri *h* e *k* vengono chiamati le ***componenti*** di *v*. Il nome deriva dal fatto che T_v può essere vista come il frutto della composizione di una traslazione orizzontale di passo *h* e una traslazione verticale di passo *k*, o, viceversa, di una traslazione verticale di passo *k* e una traslazione orizzontale di passo *h*.

Nella figura a fianco, a destra, è rappresentato un punto P e i punti ottenuti da esso applicando prima $T_{8,4}$ (punto Q) e poi $T_{3,-6}$ (punto R).

4 Qual è la traslazione che porta da P a R? Che relazione c'è tra i suoi passi e quelli delle altre due traslazioni?

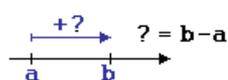
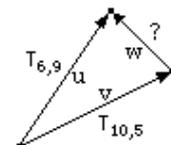
Come abbiamo già visto nella scheda 1 di *Per Strada* (quesiti 19(b) ed **e**1), la traslazione complessiva ha come Δx la somma dei Δx delle traslazioni successivamente applicate e come Δy la somma dei loro Δy. Nel caso del quesito precedente la composizione di $T_{8,4}$ e di $T_{3,-6}$ è la traslazione determinata dal vettore (8+3, 4+(-6)) = (11, -2). Per rappresentare (8+3, 4+(-6)) in forma più compatta si usa scrivere: (8,4)+(3,-6). Quindi possiamo scrivere: (8,4)+(3,-6) = (11,-2).

Cioè si *definisce* come ***addizione tra vettori*** la funzione che a due vettori v_1 = (h_1,k_1) e v_2 = (h_2,k_2) associa il vettore (h_1+h_2, k_1+k_2), che viene indicato v_1+v_2 e chiamato *somma* di v_1 e v_2.

Possiamo, perciò, dire che la traslazione frutto della composizione di due traslazioni è determinata dal vettore che è la somma dei vettori delle due traslazioni successivamente applicate. Sommare vettori si traduce nel fare l'addizione delle prime componenti e l'addizione delle seconde componenti. Poiché queste addizioni possono essere riordinate senza cambiare risultato, possiamo concludere che *cambiando l'ordine con cui sommiamo più vettori il vettore risultante rimane immutato.*

5 A fianco sono raffigurati tre vettori *a*, *b* e *c* (clicca l'immagine per ingrandirla) e l'esito della loro successiva applicazione, cioè dell'applicazione di *a*+*b*+*c*, al punto *A*. Si ottiene il punto *B*. A conferma di quanto osservato sopra, anche l'applicazione di *c*+*a*+*b* sposta *A* in *B*. Verifica che pure *c*+*b*+*a* e *b*+*a*+*c* spostano *A* in *B*.

Data la traslazione $T_{h,k}$ la traslazione $T_{-h,-k}$ viene detta sua ***traslazione opposta***. Se *v* è il vettore (h,k), il vettore (-h,-k) viene indicato con -*v* e viene chiamato ***vettore opposto*** di *v*.

Ad es. i vettori rappresentati in fig.4 (a sinistra) e in fig.5 sono l'uno l'opposto dell'altro: B-A = -(A-B).

6 Completa la figura a fianco, cioè trova qual è la traslazione che occorre far seguire alla traslazione di vettore (10,5) per ottenere complessivamente la traslazione di vettore (6,9). In altre parole, trova che cosa occorre mettere al posto di "?" in v + ? = u.

+? ? = b − a
a b

Il vettore *w* del quesito precedente è quanto occorre aggiungere a *v* per ottenere *u*. In analogia al caso dei numeri (vedi figura a fianco), si dice che *w* è il ***vettore differenza*** tra *v* e *u*. Si scrive anche *w* = *u*-*v* (*u* "meno" *v*). Le sue componenti sono la differenza delle componenti di *v* e *u*. Se *u* = (h_1,k_1) e *v* = (h_2,k_2), allora *u*-*v* = (h_1-h_2, k_1-k_2).

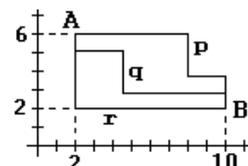
3. Distanza euclidea e distanza urbanistica

Generalizzando il concetto di distanza in linea d'aria visto nella scheda 1 dell'u.d. *Per strada* definiamo ***distanza euclidea*** tra due punti P_1 e P_2 il numero:

$$\textbf{(3.1)} \qquad d(P_1, P_2) = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

7 Calcola (e arrotonda a 5 cifre) la distanza euclidea tra i punti P e R del quesito 4.
d(P, R) = …

L'aggettivo *euclidea* deriva dal nome (*Euclide*) del matematico dell'antica Grecia (vissuto nel III secolo a.C.) a cui è dovuto il primo trattato organico di geometria astratta. In realtà ai tempi di Euclide non era ancora stato inventato l'uso delle coordinate e, quindi, lui non esprimeva la distanza come in (3.1). L'aggettivo è stato aggiunto poiché oltre a questa distanza ne possono essere definite altre.

Se vogliamo considerare un modello matematico per studiare le situazioni in cui ci si può muovere solo in verticale e in orizzontale, come nel caso di Otto Bus (→ scheda 1 di *Per strada*), quando va a piedi dalla fermata dell'autobus a scuola, cioè in cui, se A e B sono le posizioni a fianco raffigurate, non ci sono percorsi più brevi per andare da A a B di **p**, **q** o **r** o di traiettorie simili, possiamo definire:

$$\textbf{(3.2)} \qquad d(P_1, P_2) = |\Delta x| + |\Delta y| = |x_2-x_1| + |y_2-y_1|$$

Nel caso raffigurato abbiamo: $d(A,B) = |x_B-x_A| + |y_B-y_A| = 8+4 = 12$

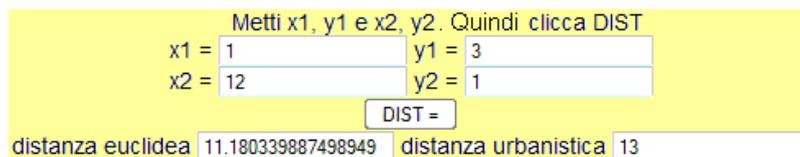
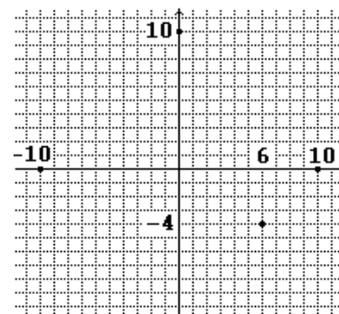
La distanza definita dalla relazione (3.2) viene chiamata ***distanza urbanistica***. Il nome deriva dal fatto che essa rappresenta la distanza tra due incroci in una città in cui le strade sono tutte disposte orizzontalmente o verticalmente.

Il programma in JS allegato calcola la distanza euclidea e la distanza urbanistica tra due punti del piano. Sotto ne è riprodotto un esempio d'uso.

Metti x1, y1 e x2, y2. Quindi clicca DIST

x1 =	1	y1 =	3
x2 =	12	y2 =	1

DIST =

distanza euclidea 11.180339887498949 distanza urbanistica 13

8 Un particolare robot si può muovere solo in due direzioni perpendicolari e nelle direzioni opposte. Rappresentiamo il pavimento con il sistema di riferimento a fianco, in cui l'asse orizzontale e l'asse verticale rappresentano le direzioni in cui il robot si può muovere e l'origine rappresenta il punto in cui è collocato inizialmente il robot. Con il lato di un quadretto rappresentiamo 1 m. Per valutare la strada che il robot deve percorre per spostarsi da una posizione a un'altra possiamo impiegare la *distanza urbanistica*.

Sono già stati raffigurati quattro tra i punti più lontani che il robot può raggiungere percorrendo 10 m. Come sono disposti gli altri punti che (con la distanza urbanistica) distano 10 m dall'origine?

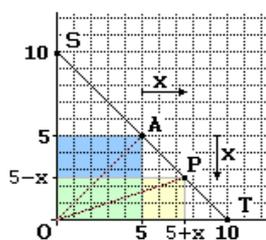
Per il robot del quesito 8 tutti i punti del segmento ST raffigurato a fianco (in un ingrandimento della figura di sopra) hanno uguale distanza dal punto O.

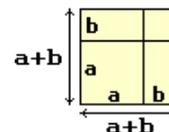
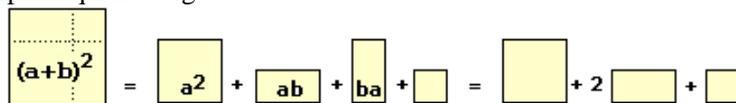
Per un robot che invece possa muoversi in ogni direzione sembra che il punto A = (5,5) sia più vicino a O di ogni altro punto di ST. *Proviamo a dimostrare questa "congettura"* usando (3.1): per questo robot, infatti, possiamo usare la *distanza euclidea*.

Sia P un generico punto di ST, ottenuto traslando A di x metri a destra e x metri in basso. Calcoliamo e confrontiamo d(O,P) e d(O,A).

$$d(O,A) = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{50} \qquad d(O,P) = \sqrt{(x+5)^2+(x-5)^2}$$

Per confrontare con $\sqrt{50}$ il termine $\sqrt{(x+5)^2+(x-5)^2}$ ci conviene *sviluppare* $(x+5)^2$ e $(x-5)^2$ (→ *termini equivalenti* in *Gli oggetti matematici*). Per fare ciò usiamo il fatto che:

$$\mathbf{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

9 Per giustificare "fisicamente" l'equivalenza $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ osserva la figura a fianco e completa quanto segue.

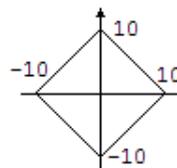
$(a+b)^2$ = a^2 + ab + ba + … = … + 2 … + …

10 Applica la riscrittura $\mathbf{(a+b)^2 \to a^2 + 2ab + b^2}$ a $(x+5)^2$ e a $(x+(-5))^2$.

$(x+5)^2 = \ldots$ $\qquad$ $(x-5)^2 = (x+(-5))^2 = \ldots$

Dunque (riprendendo la dimostrazione sospesa prima del quesito 9):

$$d(O,P) = \sqrt{(x+5)^2+(x-5)^2} = \sqrt{x^2+10x+25+x^2-10x+25} = \sqrt{2x^2+50} \geq \sqrt{50} = d(O,A).$$

In conclusione, (secondo la distanza euclidea) A è effettivamente più vicino a O di ogni altro punto del segmento ST.

Abbiamo visto che, per un robot che possa muoversi solo orizzontalmente e verticalmente, i punti che "distano" 10 m sono disposti nel modo raffigurato a fianco. Per un robot che, invece, possa muoversi in tutte le direzioni, solo i 4 punti posti sugli assi "distano" 10; gli altri hanno distanza inferiore.

Possiamo determinare quali sono per il secondo robot i punti che distano 10, cioè calcolare le coordinate dei punti più lontani in cui si può arrivare partendo dall'origine e percorrendo 10 m.

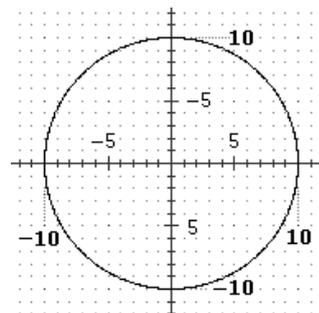
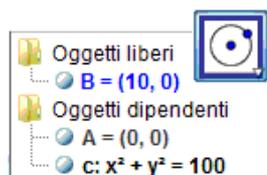
Oppure possiamo far fare questo calcolo direttamente al computer e fargli rappresentare graficamente i punti corrispondenti. Iniziamo ad osservare che $\sqrt{(x^2+y^2)} = 10$ equivale a $x^2+y^2 = 100$.

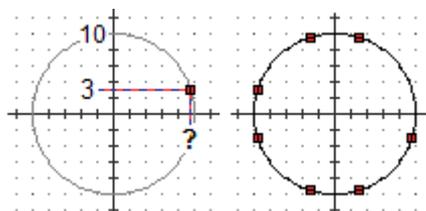
Possiamo procedere con una applicazione che ***trasforma le formule in rappresentazioni grafiche***, come *Poligon*: sotto i comandi con cui possiamo ottenere la rappresentazione grafica a destra:

```
F(x,y) = x^2+y^2
plot x: F(x,y)=100 y:-10..10|-10..10
```

vediamo che si tratta del cerchio di centro O e raggio 10. Possiamo verificare la cosa col comando:

```
C(0,0,10)
```

che traccia un cerchio centrato in (0,0) e raggio 10; vediamo che la figura si sovrappone alla precedente.

Con *GeoGebra* si può comandare col mouse il tracciamento del cerchio di centro (0,0) e raggio 10. Il programma ci fornisce anche l'equazione corrispondente.

Con programmi analoghi si potrebbero anche trovare le coordinate dei vari punti del cerchio. Ecco, ad es., come si potrebbe trovare con Poligon l'ordinata del punto di ascissa 3 raffigurato sotto a sinistra (il comando `[0,10] G(x)=100` trova la x tra 0 e 10 che verifica l'equazione G(x)=100, il successivo comando `show(…)` evidenzia il punto indicato):

```
G(x) = 3^2+x^2
[0,10] G(x)=100
se x = 9.539392014169456 = R2(91)
show(3,r2(91))
```

11 Trova, a mano, le coordinate del punto precedente e quelle degli altri punti evidenziati sopra a destra (ottenuti con opportuni ribaltamenti).

4. *Formule e figure geometriche*

Nel seguito, a meno di indicazioni contrarie, quando parleremo di *distanza* intenderemo sempre la distanza euclidea.

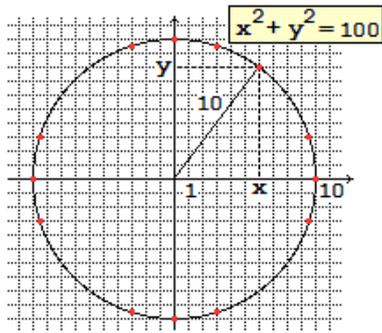



figura 6

Abbiamo visto che l'insieme dei punti che distano 10 dall'origine assume la forma di un ***cerchio***. In effetti, presi un punto *C* del piano e un numero positivo *r*, il cerchio di centro *C* e raggio *r* viene *definito* come l'insieme dei punti che distano *r* da *C*.

Abbiamo poi osservato che la figura ottenuta può essere descritta come l'insieme dei punti (*x*,*y*) che rendono vera l'equazione $x^2+y^2 = 100$.

Invece di scrivere *l'insieme degli* α tali che sia vera la condizione Γ si possono usare le abbreviazioni:

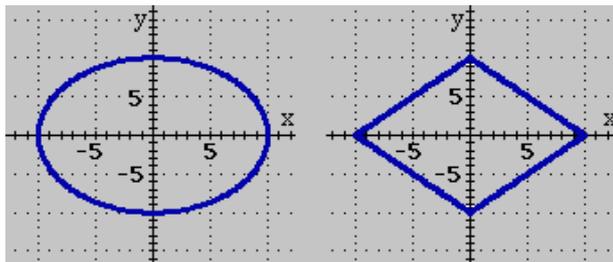
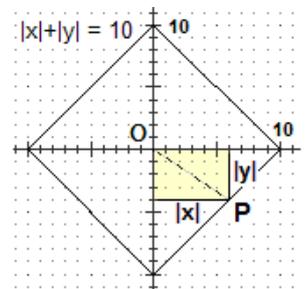
{α t.c. Γ**}** o **{**α **:** Γ**}** o **{**α / Γ**}**.

Quindi il cerchio centrato nell'origine e di raggio 10 può essere descritto come:

$\{ (x,y) : x^2+ y^2 = 100 \}$

12 Traccia in figura 6 l'insieme di punti descrivibile come $\{ (x,y) : x^2+ y^2 = 25 \}$.

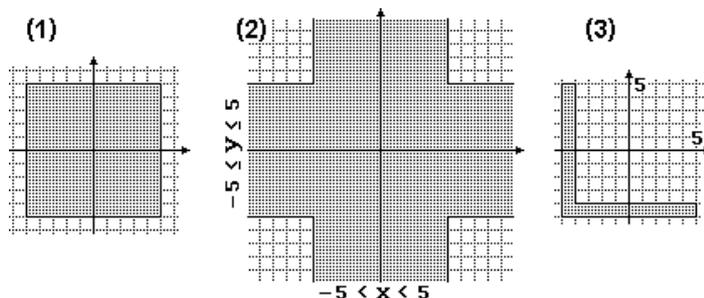
Il cerchio di figura 6 lo avremmo ottenuto anche tracciando il grafico in [-10, 10] della funzione $x \to \sqrt{(100-x^2)}$ e della funzione $x \to -\sqrt{(100-x^2)}$

Nel quesito 8 abbiamo visto che l'insieme dei punti che distano 10 dall'origine secondo la distanza urbanistica ha la forma di un quadrato. La distanza urbanistica di P = (x,y) da O è |x|+|y|. Non è altro che la somma dei valori assoluti delle componenti del vettore P-0. Ad esempio il punto (6,-4) dista 10 da (0,0) in quanto per spostarmi orizzontalmente da x=0 a x=6 devo variare la x di 6, per spostarmi da y=0 a y=-4 devo variare la y di -4, cioè di 4 in meno: la somma dei valori assoluti delle variazioni è 10. Possiamo dunque dire che il quadrato rappresentato a lato è: $\{ (x,y) : |x|+|y| = 10 \}$

Se non avessimo scelto un sistema monometrico (→ *pendenza* in *Gli oggetti matematici*) avremmo potuto ottenere, per il nostro cerchio e il nostro quadrato, le rappresentazioni a lato.

L'aspetto non è più quello di un "cerchio" o di un "quadrato": se misuriamo "fisicamente" le distanze con un righello, i punti della figura a sinistra non hanno la stessa distanza dal punto (0,0) e le due diagonali della seconda figura non hanno la stessa lunghezza. Ma dal punto di vista "matematico", riferendosi al piano cartesiano e alla distanza euclidea, siamo di fronte, anche in questi casi, a un "cerchio" e a un "quadrato". Abbiamo già fatto una analoga distinzione tra "pendenza stradale" e "pendenza dei grafici.

Come possiamo descrivere "numericamente" (cioè mediante una formula numerica) la parte interna al cerchio di figura 6, cioè all'insieme degli (x,y) che rendono vera l'equazione $x^2+ y^2 = 100$? Si tratta dei punti che hanno distanza *d* da O inferiore a 10, cioè tali che $d^2 < 100$. Quindi questa figura può essere descritta con la disequazione $x^2+ y^2 < 100$: $\{ (x,y) : x^2+ y^2 < 100 \}$

13 Come descriveresti numericamente la parte interna al quadrato della figura successiva al ques. 12?

14 Come descriveresti numericamente il quadrato punteggiato nella successiva figura **(1)** (i quadretti hanno lato 1)?

Nel piano cartesiano molte figure possono essere descritte mediante equazioni ($x^2+ y^2 = 100$, $|x|+|y| = 10$, …) o mediante disequazioni ($x^2+ y^2 < 100$, $|x|+|y| < 10$, …) o mediante combinazioni di equazioni e disequazioni.

Ad esempio la figura dell'ultimo quesito era descrivibile come: $\{(x,y) : -5 \le x \le 5, -5 \le y \le 5\}$. Nel caso dell'illustrazione **(2)** la figura tratteggiata è una croce i cui bracci supponiamo si prolunghino senza fine. Essa comprende tutta la striscia di piano che va dalla ordinata -5 alla ordinata 5 e tutta la striscia di piano che va dalla ascissa -5 alla ascissa 5. Possiamo perciò descriverla come: $\{(x,y) : -5 \le x \le 5$ ***o*** $-5 \le y \le 5\}$.

Nello scrivere $\{(x,y) : -5 \le x \le 5, -5 \le y \le 5\}$ abbiamo inteso che la condizione sia vera quando siano vere $-5 \le x \le 5$ ***e*** $-5 \le y \le 5$, cioè quando siano vere entrambe contemporaneamente.

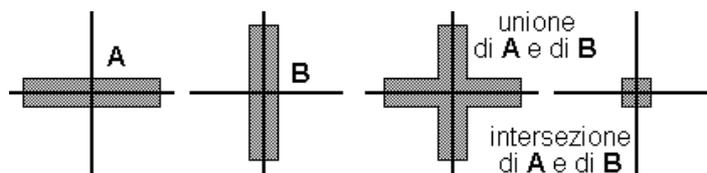
Abbiamo già osservato (→ ques. e4 della scheda 1 di *Per strada*) che la *congiunzione* "***e***" nel linguaggio comune non è sempre impiegata con questo significato. Ad esempio nella frase «l'uso di questo medicinale è sconsigliato alle persone con età minore di 5 anni *e* maggiore di 70 anni» non si intendono indicare le età che siano contemporaneamente minori di 5 e maggiori di 70 anni – tali età non esistono! – ma si intende: «… alle persone con età minore di 5 anni *e a quelle con età* maggiore di 70 anni».

Nello scrivere $\{ (x,y) : -5 \le x \le 5$ o $-5 \le y \le 5 \}$ abbiamo inteso che la condizione sia vera quando sia vera *almeno una* tra le due condizioni $-5 \le x \le 5$ e $-5 \le y \le 5$.

Nel linguaggio comune invece un "***o***" tra due condizioni spesso viene usato per indicare che deve essere vera *una sola* tra le due condizioni.

Volendo evitare ambiguità con gli usi delle congiunzioni nel linguaggio comune possiamo ricorrere agli operatori logici OR, AND e NOT. Quindi possiamo descrivere le due figure con:

$\{ (x,y): -5 \le x \le 5$ OR $-5 \le y \le 5 \}$ $\{ (x,y): -5 \le x \le 5$ AND $-5 \le y \le 5 \}$

Ecco le rappresentazioni grafiche di **A** OR **B** e di **A** AND **B**.

15 Descrivi la figura **(3)** (dopo il ques.14).

Nota. Cerchio o circonferenza? Il quadrato è solo il contorno? … In vari testi di geometria italiani ciò che qui abbiamo chiamato *cerchio* viene chiamato ***circonferenza*** mentre con il nome *cerchio* si intende comprendere anche la parte interna. Ad es. $x^2+ y^2 = 100$ descriverebbe una circonferenza, $x^2+ y^2 \le 100$ un cerchio. Analogamente, nel caso della figura successiva al ques. 12, c'è chi chiama quadrato solo il contorno ($|x|+|y|=10$) e chi chiama quadrato il contorno con la parte interna ($|x|+|y| \le 10$). Questioni analoghe valgono per i triangoli, le sfere (solo la superficie o anche la parte interna?), …

Noi non "sposeremo" una posizione particolare. Il contesto man mano chiarirà a quale figura ci riferiremo.

5. Geometria e realtà

I modelli matematici che abbiamo considerato in questa scheda (punti, traslazioni, vettori, figure, …) vengono studiati in un'area della matematica chiamata ***geometria***.

Questo nome è di origine greca (deriva da *ghé* e *metron* che in greco significavano «terra» e «misura») e, come primo significato, indicava le tecniche per la misura dei campi, per la suddivisione dei terreni in parti di forme opportune, …. In questo senso è sopravvissuta la parola *geometra*, con cui viene indicato il professionista che fa rilevamenti topografici e si occupa di altre questioni riguardanti il territorio: strade, piccole costruzioni, … (all'università vengono chiamati *geometri* anche i matematici che si occupano di geometria; ma questa è una terminologia per "addetti ai lavori").

Ora di questi aspetti si occupano, appunto, i geometri, gli architetti, gli ingegneri, …. *Il matematico studia in generale i modelli matematici per rappresentare lo spazio, senza legarsi a una particolare situazione* (forme ed estensioni di terreni, oggetti, …, movimenti di pianeti, macchine, elettroni, …, disposizioni delle parti che compongono un edificio, un animale, una molecola chimica, …).

Abbiamo visto, ad esempio, che per il matematico la *distanza* - (3.1) o (3.2)) - è un numero senza l'indicazione di una unità di misura.

È quando il *piano* viene visualizzato su un foglio di carta che si stabilisce una unità grafica con cui rappresentare, ad esempio, le unità o le decine. Oppure è quando si associa al nostro piano astratto una situazione concreta che si stabilisce l'unità di misura con cui esprimere le distanze.

Quando, "facendo matematica", consideriamo un cerchio disegnato con un compasso (il centro è la posizione in cui è stata messa la punta del compasso, il raggio è la distanza tra mina e punta), non ci preoccupiamo del colore con cui è stato tracciato o del colore e del tipo di foglio impiegato; non ci preoccupiamo neanche, troppo, dello spessore della linea tracciata. Cerchiamo, cioè, di *astrarre* solo la figura geometrica, cioè l'insieme dei punti (cioè di posizioni "esatte") che con quel disegno si vorrebbe rappresentare.

Quando di un oggetto reale consideriamo la figura geometrica che esso forma facciamo un'astrazione non solo perché trascuriamo colore, materiale, … dell'oggetto, ma anche perché, in genere, la sua forma è solo una approssimazione della figura geometrica considerata.

Ad esempio anche se diciamo che un tavolo è rotondo in realtà la superficie di base del tavolo non ha rigorosamente la forma di un cerchio: comunque si cerchi di fissare un centro C non si avrà mai che tutti i punti del bordo sono "esattamente" equidistanti da C. Impiegando strumenti di misura man mano più precisi prima o poi si trovano delle differenze. Infatti il bordo presenta inevitabilmente qualche irregolarità, per quanto piccola possa essere.

Anche quando usiamo il concetto di *piano* facciamo una astrazione. Ad es. quando diciamo che un territorio è piano in realtà trascuriamo le piccole asperità che, comunque, il terreno presenta.

Quando, poi, considerassimo una rappresentazione cartografica del territorio e cercassimo di trovare la distanza tra due punti mediante la formula (3.1), se il territorio è molto ampio troveremmo un valore abbastanza diverso da quello che troveremmo usando la scala riportata sulla cartina; ed entrambi questi due valori sarebbero diversi da quello che si otterrebbe con una misura diretta.

La superficie della terra infatti è sferica: solo piccole porzioni di essa (il territorio di una città, quello di una provincia) possono essere approssimate abbastanza fedelmente con delle parti di piano. Per territori più ampi, comunque si fissi un sistema di coordinate non si riesce a trovare una corrispondenza tra le distanze calcolate con (3.1) e quelle misurate direttamente (→: scheda 1 de *La matematica e i suoi modelli*).

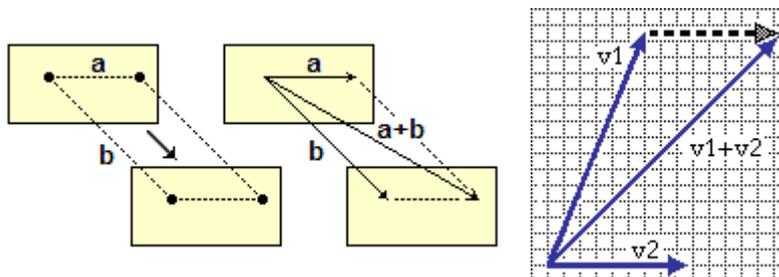
Non esistono confini netti tra la geometria e le altre aree della matematica.

Ad esempio per fare geometria si usano anche i numeri, le funzioni, le equazioni, … .

Viceversa, per analizzare i valori di una grandezza che varia nel tempo o il modo in cui si distribuisce una serie di dati o …, si ricorre spesso alla rappresentazione grafica dei valori numerici e allo studio della forma della figura che così si ottiene. Anche i grafi e i diagrammi di flusso in qualche modo ricorrono a dei concetti di tipo geometrico.

I modelli geometrici servono, dunque, non solo per rappresentare lo *spazio fisico*, ma anche per visualizzare altri modelli matematici (funzioni, equazioni, statistiche, …).

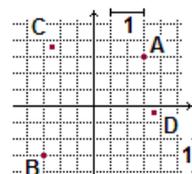
Anche in altre discipline i modelli geometrici vengono impiegati non solo per rappresentare figure, traiettorie, …, ma pure altre situazioni. Consideriamo ad esempio il concetto di ***vettore***.

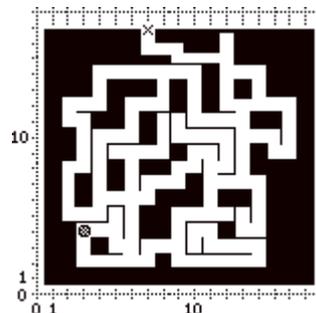
Noi abbiamo introdotto i vettori per descrivere i cambiamenti di posizione e la somma di vettori per descrivere l'effetto complessivo di due *successivi* cambiamenti di posizione: se una formica si sposta di **a** lungo un foglio e se poi il foglio viene spostato di **b** sul tavolo, possiamo descrivere lo spostamento complessivo della formica con la somma **a+b** dei vettori corrispondenti ai due spostamenti. Si può dimostrare che lo spostamento complessivo è lo stesso se i due movimenti sono contemporanei.

Oltre agli spostamenti in fisica vengono rappresentati con vettori anche le *velocità*, le *forze* e varie altre grandezze. Si tratta di grandezze di cui si può dare una descrizione completa indicando, oltre alla loro misura (*intensità*), la loro direzione. Ad esempio un peso di 15 kg può essere rappresentato con un vettore lungo 15 (vettore che trasla un punto in una posizione distante 15). Più precisamente, si parla di un «vettore di modulo 15». Infatti, dato un vettore v = (h, k) si chiama ***modulo*** di v la distanza dalla posizione iniziale alla posizione dopo l'applicazione della traslazione T_v, cioè $\sqrt{(h^2+k^2)}$.

Si può, inoltre, dimostrare che la composizione di due di esse [la composizione di due velocità, la composizione di due forze, …] dà luogo alla grandezza [una velocità, una forza, …] rappresentata dal vettore che è la somma dei vettori che rappresentano le due grandezze composte, come si vede nella figura precedente, a destra.

Grandezze di questo genere (caratterizzate da intensità e direzione e che si compongono secondo la "regola del parallelogramma", ossia dando luogo ad un vettore somma che si dispone lungo la diagonale del parallelogramma che ha per lati le frecce che rappresentano i vettori sommati), vengono dette ***grandezze vettoriali***. In fisica, quindi, oltre ai vettori-spostamento, si considerano i vettori-forza, i vettori-velocità, … . Il modello matematico "*vettore*" viene, dunque, impiegato per rappresentare molte più situazioni, e non solo geometriche, rispetto a quelle da cui siamo partiti nell'u.d. *Per strada*.

6. Esercizi

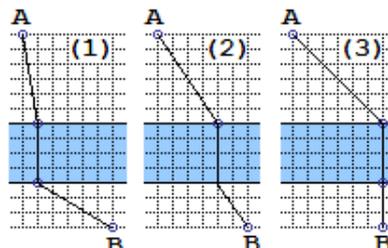
e1 Quali sono le coordinate dei punti evidenziati nella figura a fianco? Esprimile approssimate ai decimi, ammettendo che sul valore indicato ci possa essere, al peggio, un errore di un decimo in più o in meno (ad esempio scrivi x_D = 1.8 anche se dal disegno puoi solo dedurre che x_D = 1.8±0.1).

e2 A partire da un punto al centro di un foglio di carta quadrettata rappresenta i punti intermedi e il punto finale in cui si arriva applicando successivamente le traslazioni $\mathbf{T}_{7,2}$, $\mathbf{T}_{3,-4}$ e $\mathbf{T}_{-10,2}$.

e3 A fianco è raffigurato un labirinto, al cui interno, nel punto segnato con un cerchietto, c'è il signor Kappa. La crocetta rappresenta l'uscita (**"clicca"** l'immagine per ingrandirla):

(a) Trova la traiettoria più breve con cui Kappa può uscire dal labirinto.

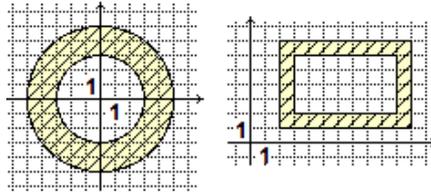
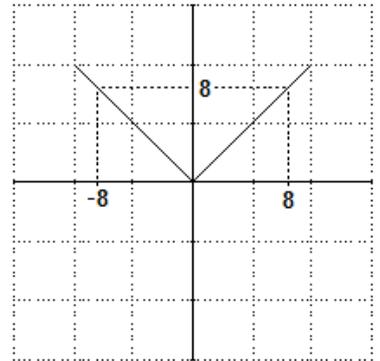
(b) Utilizzando le graduazioni tracciate e tenendo conto che ogni divisione rappresenta 1 m, trova lo "spostamento" complessivo con cui Kappa raggiungerebbe l'uscita.

(c) Se Kappa avesse scelto la traiettoria più lunga (senza percorrere più volte lo stesso pezzo di strada), quale sarebbe stato lo spostamento complessivo?

(d) Calcola la distanza in linea d'aria tra posizione di Kappa e uscita.

e4 Due località A e B sono separate da un fiume dal letto molto ampio. Viene deciso di congiungere A e B con una strada, comprendente un ponte, che, per motivi tecnici, deve essere costruito perpendicolarmente al corso del fiume. Sotto sono illustrati tre progetti per la costruzione di questa strada (**"clicca"** l'immagine per ingrandirla). Sapresti stabilire senza fare calcoli quale dei tre progetti rende A e B più vicine (nel senso della "distanza lungo la strada")?

[Traccia. Su un foglio quadrettato riproduci la strada che si otterrebbe da ciascun progetto componendo diversamente i vettori che rappresentano i tre tratti rettilinei: prima il tratto del ponte, poi il tratto da A al letto del fiume, poi il tratto dal letto del fiume a B]

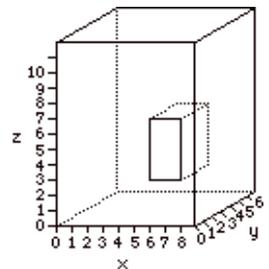
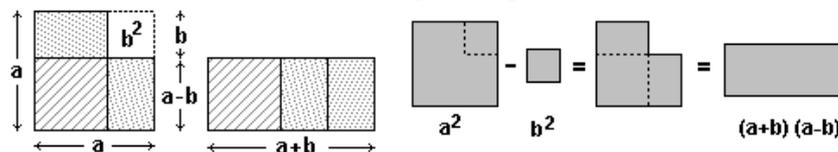
e5 Ricordando che $\sqrt{(x^2)} = |x|$, *dimostra* che la distanza euclidea e la distanza urbanistica tra due punti A e B coincidono se i due punti hanno la stessa ascissa o la stessa ordinata.

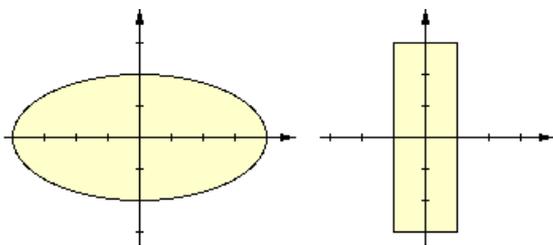
e6 A fianco è tacciato il grafico di $x \to |x|$ per x che varia nell'intervallo [-10,10]. Prova a tracciare, senza fare calcoli, i grafici di $x \to |x|-10$ e di $x \to -|x|$.
[*traccia*: i punti del primo sono ottenibili da quelli del grafico di $x \to |x|$ abbassandone l'ordinata di 10, cioè applicando la traslazione verticale di passo $\Delta y = -10$; i punti del secondo sono ottenibili dallo stesso grafico cambiando il segno dell'ordinata]

e7 Descrivi le figure sopra tratteggiate nelle forma: { (x,y) : *condizione* }.

e8 Disegna su carta quadrettata la figura $\{(x,y) : \text{NOT } 9 < x^2+y^2 < 25\}$

e9 Disegna su carta quadrettata le figure:
(1) $\{(x,y) : x-1 = 0 \text{ OR } y-2 = 0\}$ (2) $\{(x,y) : x-1 = 0 \text{ AND } y-2 = 0\}$
(3) $\{(x,y) : (x-1)\cdot(y-2) = 0\}$ (4) $\{(x,y) : (x-1)^2+(y-2)^2 = 0\}$

e10 Una macchina automatica deve fare un foro in un parallelepipedo di metallo (vedi la figura a lato). Nel programmare la macchina, in quale dei seguenti modi descriveresti il foro?

(1) $6 \le x \le 8$ AND $3 \le y \le 7$ AND $0 \le z \le 3$
(2) $6 \le x \le 8$ AND $3 \le z \le 7$ AND $0 \le y \le 3$
(3) $6 \le x \le 8$ AND $3 \le z \le 7$ AND $1 \le y \le 4$

e11 Utilizzando un ragionamento "fisico" analogo a quello impiegato nel quesito 9, giustifica l'equivalenza di $a^2- b^2$ a $(a+b)(a-b)$. Verifica questa equivalenza anche con metodi algebrici.

e12 Mediante la CT calcola $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$. Che cosa ottieni? Trasforma il termine usando l'equivalenza discussa nel quesito precedente (con $a = \sqrt{3}$, …) e calcola il nuovo termine.

e13 Utilizza opportunamente l'equivalenza discussa in **e11** per calcolare mentalmente $97\cdot 103$.

e14 Le figure a lato sono un "cerchio" e un "quadrato", ma non sono rappresentate in un sistema monometrico. Assegna valori alle tacche in modo che, nel sistema di riferimento che ottieni, tali figure siano effettivamente un cerchio e un quadrato.

1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini: *piano numerico* (prima di fig.1) *spazio a … dimensioni* (prima di es.2) *traslazione* (dopo es.3) *vettore* (dopo es.3) *distanza euclidea* (§ 3) *distanza urbanistica* (§ 3) *cerchio* (§ 4) *modulo di un vettore* (§ 5) *grandezza vettoriale* (§ 5)

2) Su un foglio da "quadernone", nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").

Per strada

La matematica per i movimenti e i mezzi di trasporto

Scheda **2**

Fuori città in bicicletta o in motorino

0. Introduzione

Nella scheda 1 di *Per strada* abbiamo considerato gli spostamenti in una zona pianeggiante di piccola estensione, comprendente la casa e la scuola di Otto Bus. Abbiamo soffermato la nostra attenzione soprattutto sugli aspetti spaziali (distanze, cambiamenti di posizione, …), impiegando modelli di tipo geometrico (e algebrico: formule numeriche, …). Un'analisi più completa avrebbe preso in considerazione anche i tempi di percorrenza, le diversità tra un giorno della settimana e l'altro, …, e avrebbe comportato l'impiego di ulteriori modelli matematici. In **e16** vi viene proposta una serie di attività che approfondiscono l'analisi della situazione.

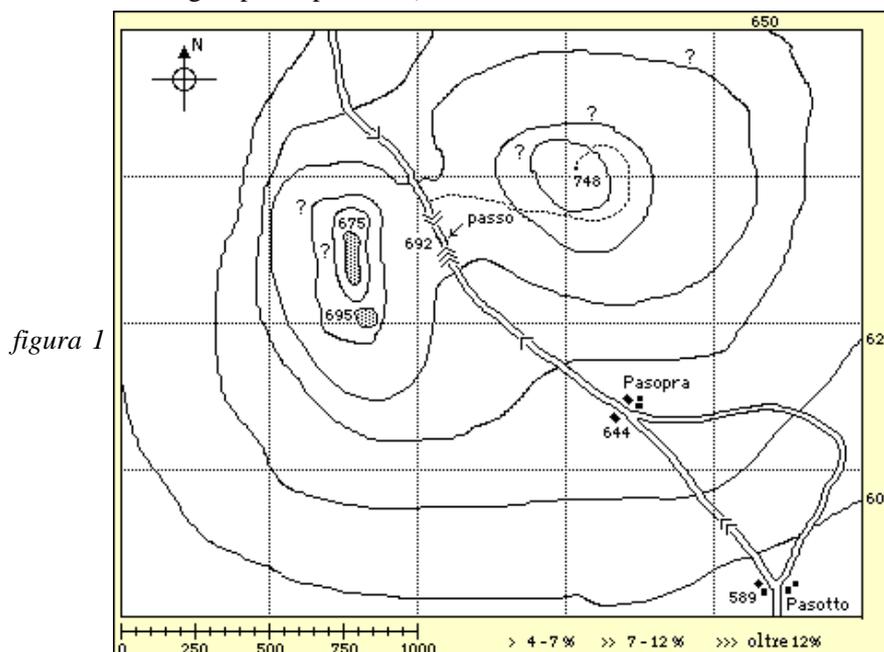
Ora esaminiamo una nuova situazione: una gita in bicicletta o in motorino.

1. Le pendenze

Betta e Rina decidono di fare insieme una gita in campagna, Betta con la sua bicicletta e Rina con il suo motorino. Vogliono andare in una zona nuova, che non conoscono. Per sceglierla consultano alcune cartine.

Per decidere l'itinerario cercano di tener conto anche del tempo che dovranno impiegare e delle difficoltà del percorso. Quindi prendono in considerazione non solo la lunghezza della strada, ma anche le salite che essa presenta: devono valutare se il ciclomotore di Rina e le gambe di Betta ce la faranno ad affrontarle e devono tener conto che nei tratti in salita l'andatura sarà più lenta che nei tratti in pianura.

Alcune cartine sono del tipo di quella parzialmente raffigurata in *figura 1*, che presenta l'indicazione sia delle curve di livello, sia della pendenza dei tratti di strada più ripidi (oltre a quella delle quote di alcuni posti particolari, come cime, laghi, passi, paesi, …).

figura 1

Una ***curva di livello*** (o *isoipsa*, che in greco significa "di uguale altezza") è una linea costituita da punti che rappresentano posizioni della superficie terrestre che sono alla stessa quota sul livello del mare (altitudine). Ad esempio il paesino Pasopra, che è alla quota di 644 m, sta nella striscia compresa tra la curva di livello alla quota 625 m e la curva di livello alla quota 650 m.

Una cartina con curve di livello è un modello cartografico che consente di farsi un'idea tridimensionale del territorio rappresentato. In *figura 2*, *a sinistra* è raffigurato il plastico che si può ottenere sulla base delle curve di livello della porzione di cartina di figura 1. Come si vede, si tratta di un plastico a scalini, che è solo una approssimazione della forma della superficie terrestre reale. Ad es. la parte piana compresa tra la curva di quota 625 e la curva di quota 650 nella realtà non è piana, ma comprende una superficie che, più o meno gradualmente, passa dalla quota 625 alla quota 650. E non è detto che sia sempre in salita: la strada dopo Pasopra potrebbe presentare un tratto in discesa per poi risalire fino alla quota 650.

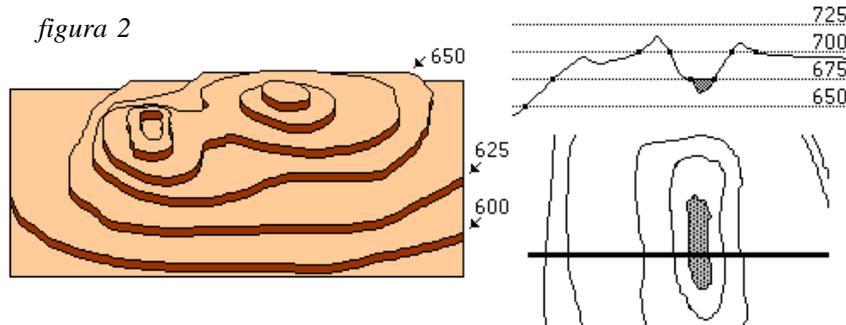



figura 2

Per avere un'idea di come, nella realtà, varia l'altitudine, si veda in *figura 2*, *a destra*, il profilo del rilievo che sorge a ovest del passo; il profilo è visto secondo una sezione che passa per il laghetto più grande e che è evidenziato nella parte *bassa* della figura.

1 Tenendo conto delle altitudini indicate (e aiutandoti con figura 2) completa figura 1 mettendo al posto dei punti interrogativi le quote delle corrispondenti curve di livello.

La carta riprodotta in figura 1 ci dice che, provenendo da sud, l'ultimo tratto di strada prima del passo ha una pendenza che supera i 12% (>>>). Dopo c'è una discesa con pendenza tra il 7 e il 12% (<<); gli "angolini" sono invertiti, a indicare che si tratta di una salita per chi proviene da nord. Ricordando che la ***pendenza*** è il rapporto tra variazione verticale e variazione orizzontale, possiamo dire che nell'ultimo tratto prima del passo ad ogni 100 m di avanzamento orizzontale corrisponde mediamente un aumento di quota superiore ai 12 m; nella discesa immediatamente seguente ad ogni 100 m di avanzamento orizzontale corrisponde un abbassamento compreso tra i 7 e i 12 m.

Proviamo a controllare la prima di queste indicazioni, cioè ">>>". Su una striscia di carta (→ *figura 3* a sinistra) facciamo due segni per rappresentare la strada dalla quota di 675 m al passo (che è alla quota di 692 m). Disponendo la striscia lungo la scala grafica troviamo che il tratto di strada considerato si estende orizzontalmente per circa 125 m. Quindi, poiché il dislivello è di 692-675 = 17 m, abbiamo:
pendenza media = (variazione verticale) / (variazione orizzontale) = 17/125 = 0.136 = 13.6% = [arrotondando] 14%. Ciò è in accordo col segno ">>>".

[abbiamo arrotondato a due sole cifre; non aveva senso considerare più cifre in quanto sia 17 che 125 sono valori approssimati; ad esempio se il valore esatto del dislivello fosse 17.4000… e quello della strada percorsa orizzontalmente fosse 124.000… avremmo ottenuto 17.4/124 = 14.03…% invece di 13.6%]

Osserviamo che aver trovato che la pendenza "media" del tratto considerato è del 14% non significa che in tutto il tratto ad ogni metro di avanzamento orizzontale corrispondono 14 cm di innalzamento: vi possono essere pezzi di strada in cui la pendenza è inferiore e pezzi di strada in cui la pendenza è superiore.

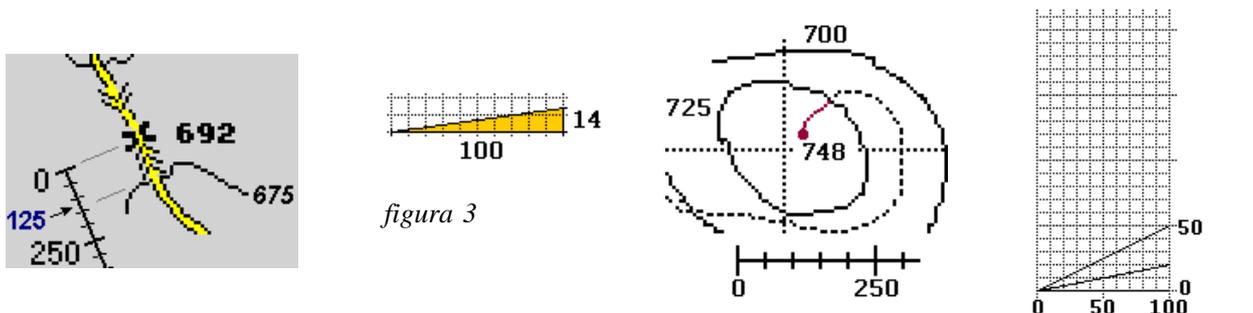
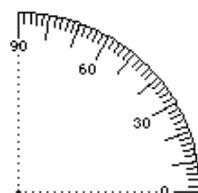
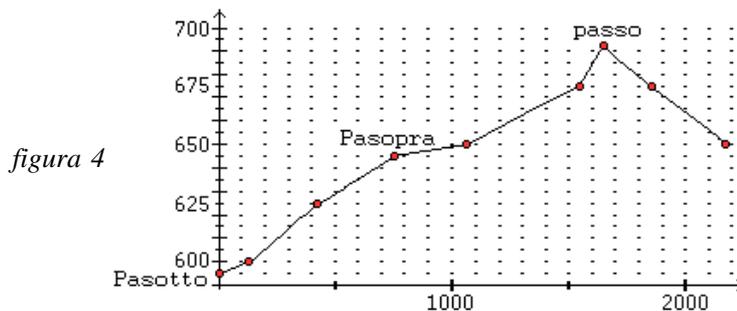



figura 3

2 In prossimità del passo parte un sentiero che conduce alla cima di un monte. Stima quale pendenza si deve affrontare nell'ultimo tratto del sentiero (dalla quota 725 alla vetta: vedi figura sopra, al centro).

3 Sopra, a destra, sono raffigurate due salite con le pendenze del 20% e del 50%. Traccia una salita con la pendenza del 100% e una con la pendenza del 200%. Utilizzando un goniometro o la porzione di cerchio graduato riprodotta a destra (più riga e squadra) misura l'angolo di inclinazione di ciascuna di queste due salite.

Betta e Rina hanno imparato facilmente a leggere sia le curve di livello che le indicazioni del tipo ">>>".. Riescono quindi a leggere e confrontare anche le cartine che hanno uno solo dei due tipi di indicazione. Le ragazze hanno anche comprato un libretto in cui sono suggeriti alcuni itinerari per gite in bicicletta; ogni itinerario è rappresentato con una cartina priva di curve di livello e di indicazioni di pendenza, a cui è però accoppiato un ***profilo altimetrico*** come quello illustrato in *figura 4*, relativo al tratto di strada che parte da Pasotto: sull'asse orizzontale è indicata la strada percorsa, su quello verticale è indicata l'altitudine (entrambe in metri).

Come si può notare, l'inclinazione del grafico non riproduce fedelmente l'inclinazione della strada. Ad esempio l'ultimo tratto di salita, che ha una pendenza del 14%, è rappresentato più ripido della strada con pendenza del 50% raffigurata nell'illustrazione considerata nel quesito 3. Del resto nessuno di voi ha mai visto strade così inclinate! (→ figure 6 e 7 della scheda 2 di *La matematica e i suoi modelli*).

figura 4

4 Il sistema di riferimento impiegato in fig. 4 e quello dell'immagine nella parte destra di fig. 3 sono monometrici?

I profili altimetrici non riproducono fedelmente l'angolo di inclinazione di un tratto di strada, cioè l'angolo di cui la strada è ruotata verso l'alto rispetto al piano orizzontale. Del resto neanche l'indicazione numerica della pendenza ci suggerisce immediatamente un'immagine visiva dell'angolo di inclinazione: sappiamo che una pendenza del 100% corrisponde a un'inclinazione di 45°, ma ci è difficile avere un'idea degli angoli corrispondenti a pendenze diverse. Infatti, come abbiamo visto nel quesito 3, non c'è proporzionalità tra angoli di inclinazione e pendenze: al raddoppiare [dimezzare, …] della pendenza non si raddoppia [dimezza, …] l'angolo di inclinazione.

Per trovare, ad esempio, l'angolo di inclinazione corrispondente a un tratto di strada lungo 5 m e con un dislivello di 2.5 m possiamo procedere così (→ *figura 5*):

- fissiamo una retta orizzontale e un punto Q su di essa;
- con un compasso tracciamo un cerchio di centro Q e raggio 5 cm;
- con una riga e una squadra tracciamo una retta parallela alla retta già tracciata e distante 2.5 cm da essa, fino a incontrare il cerchio in un punto P;
- il segmento che congiunge P con Q ha l'inclinazione voluta;
- con un goniometro troviamo che l'angolo di inclinazione è di 30°.

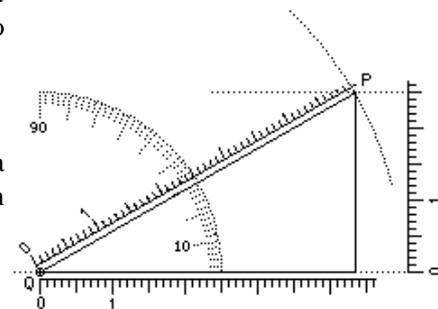



figura 5

5 Come avremmo potuto trovare P senza usare il compasso?

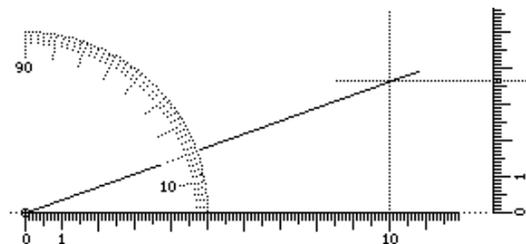
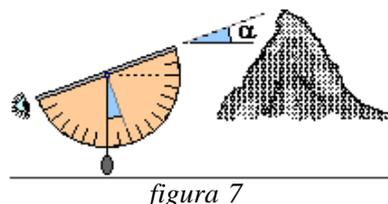
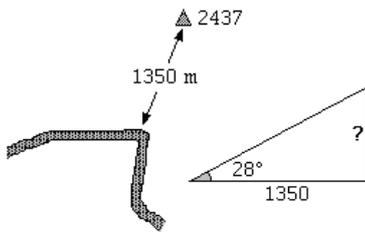



figura 6

Possiamo ricorre a "metodi grafici" anche per i problemi inversi, ad esempio per trovare la pendenza che corrisponde a un angolo di inclinazione data.

6 Osservando *figura 6* stabilisci qual è la pendenza di un tratto di strada inclinato di 20°.

Il *goniometro verticale* (→ *figura 7*) permette di misurare l' angolo di inclinazione con cui osserviamo un oggetto. Nel caso raffigurato lo sguardo è inclinato di 20°: per inquadrare la cima della montagna dobbiamo inclinare il tubo di 20°; contemporaneamente il filo a piombo ruota di 20°; sul cerchio graduato attaccato alla tavoletta possiamo leggere questa rotazione.

figura 7

7 Siamo presso un'ansa di un fiume. Per trovare a che altitudine ci troviamo consultiamo la cartina. Da essa possiamo dedurre che il monte che possiamo scorgere è alto 2437 m e, usando la scala, che la distanza in orizzontale tra noi e la cima del monte è di circa 1350 m. Utilizzando un piccolo goniometro verticale troviamo che l'angolo di inclinazione con cui vediamo la cima del monte è di 28°. Come possiamo calcolare il dislivello tra noi e la cima del monte e, quindi, la nostra altitudine?

[*traccia*: utilizza figura 6 per trovare la pendenza del nostro sguardo; quindi, da questa e dalla distanza in orizzontale, deduci il valore (arrotondato a 2 cifre) del dislivello in metri].

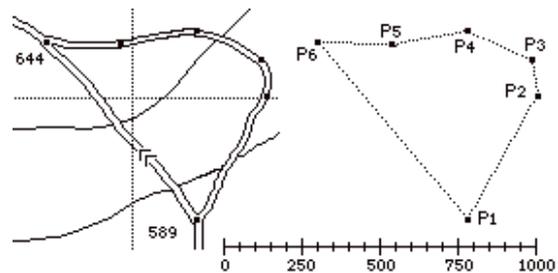
2. Affrontare le salite

Rina e Betta hanno scelto un itinerario che comprende la strada che abbiamo considerato in figura 1. Meticolose, le due ragazze vogliono programmare ogni dettaglio. Ad esempio vogliono valutare se a Betta, con la sua bicicletta, al bivio presso Pasotto convenga prendere la strada a destra o quella a sinistra. Esaminiamo anche noi la situazione.

Innanzitutto confrontiamo l'*avanzamento orizzontale* lungo le due strade. Le cartine, infatti, riproducono abbastanza fedelmente l'avanzamento orizzontale lungo una strada, non la lunghezza della strada stessa: la superficie terrestre viene "spiaccicata" sul piano orizzontale, per cui si perde la dimensione verticale.
[qui, ovviamente, parlando di "orizzontale" e "verticale" non ci riferiamo al foglio di carta ma allo spazio tridimensionale]

Per la strada a sinistra, che è quasi rettilinea, possiamo procedere come in fig. 3 e trovare che tra i due bivi intercorrono 750 (±10) m.

La strada a destra presenta varie curve. Per procedere possiamo approssimarla con una ***spezzata***, cioè con una linea ottenuta concatenando più segmenti.

8 Singolarmente o a gruppi calcolate l'avanzamento orizzontale lungo questa strada in uno dei due seguenti modi:

(*a*) su una striscia di carta tracciate una sequenza di segmenti allineati lunghi quanto i segmenti che compongono la spezzata $P_1P_2 \ldots P_6$ (come in fig. 3, segnate sulla striscia due tacche in corrispondenza di P_1 e di P_2; poi ruotate la striscia intorno a P_2 in modo da poter segnare una tacca in corrispondenza di P_3, e così via). Utilizzando la scala grafica trovate la lunghezza reale in metri che corrisponde alla distanza tra la prima e l'ultima tacca.
(*b*) Usando una riga millimetrata trovate la distanza di P_1 da P_2 (arrotondata ai millimetri, cioè, posto lo "zero" della riga su P_1, scegliendo la tacca dei millimetri più vicina a P_2; la annotate; poi trovate la distanza di P_2 da P_3 e la annotate; e così via. Alla fine sommate le distanze e trovate, così, un valore che esprime la lunghezza della spezzata. Con la riga e la scala grafica potete poi trovare la lunghezza reale in metri.

Confrontate e analizzate i diversi valori ottenuti e stabilite che misura prendere come avanzamento orizzontale lungo la strada di destra:

a_1 = avanzamento lungo la strada a sinistra = 750 m a_2 = avanzamento lungo la strada a destra = … m

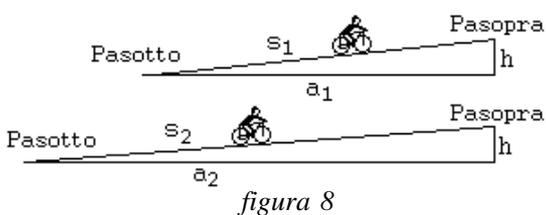



figura 8

In *figura 8* sono schematizzate le due strade. s_1 e s_2 sono le loro lunghezze, a_1 e a_2 sono i corrispondenti avanzamenti, h è il dislivello da superare. Le due strade partono da uno stesso punto e arrivano in uno stesso punto: sono due modi differenti per superare il dislivello h. Vogliamo capire la diversità delle prestazioni (sforzo, fatica, …) necessarie per affrontare il dislivello con le due strade.

Esaminiamo la situazione a partire da un esempio più semplice (→ *figura 9*).

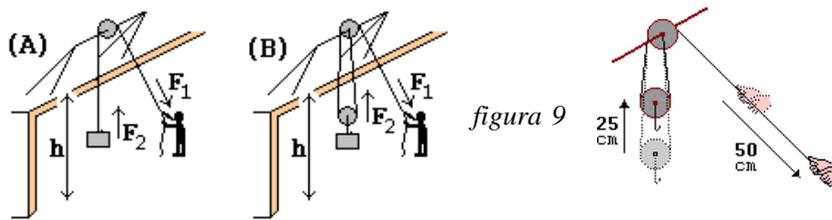



figura 9

In un magazzino le casse vengono sollevate su un soppalco di altezza *h* a volte con il dispositivo A (una carrucola fissa), a volte con il dispositivo B (taglia o *paranco*, che si ottiene agganciando la fune della carrucola al supporto che la regge e inserendo una rotella dotata di gancio). A destra è illustrato meglio il dispositivo B. Con A occorre tirare la fune di un tratto *h*, con B occorre tirare la fune di un tratto doppio: tirando la fune per 50 cm la rotella mobile si alza di soli 25 cm. Infatti il tratto di fune tirato si distribuisce su due tratti verticali.

In ogni caso, sia col dispositivo A che col dispositivo B, l'effetto è l'innalzamento della cassa di un dislivello *h*. Se *P* è il peso della cassa, in fisica questo effetto viene espresso dicendo che: *è stato prodotto un* ***lavoro*** *pari a* ***P·h***.

Ad es. se la cassa pesa 40 kg e il dislivello è di 4 m, il lavoro prodotto per sollevare la cassa sul soppalco è: 40·4 = 160 kgm. Il simbolo *kgm* indica l'unità di misura *chilogrammetro*: è il lavoro per sollevare di 1 m un peso di 1 kg.

Se la cassa pesasse 20 kg il lavoro prodotto sarebbe la metà: 20·4 = 80 kgm. Se la cassa pesasse 60 kg, cioè il 50% in più, anche il lavoro sarebbe il 50% in più, cioè 60·4 = 240 kgm invece di 160 kgm.

Il lavoro varia proporzionalmente anche al dislivello: se il dislivello fosse la metà, cioè 2 m, anche il lavoro sarebbe la metà; infatti 40·2 = 80 kgm.

Il lavoro è stato definito come *P·h* proprio perché fosse proporzionale sia al peso *P* che al dislivello *h*.

Nota. Stiamo esprimendo le forze in chilogrammi e il lavoro in chilogrammetri, come si fa spesso nelle applicazioni quotidiane. Nelle scienze fisiche, invece, occorre tener conto che il chilogrammo viene usato per misurare le masse degli oggetti: a seconda di dove essi sono collocati (al livello del mare, su un aereo o sulla luna) possono essere attratti verso il centro (della terra o della luna) con una forza maggiore o minore. Si usa, allora, il ***Newton***, che corrisponde circa alla forza con cui, al livello del mare, è attratta verso il centro della terra una massa di circa 1 hg, o, in alcune scienze tecniche, il chilogrammo-forza, che è pari alla forza con cui, al livello del mare, è attratta verso il centro della terra una massa di circa 1 kg. Per approfondimenti vedi, in fondo, e18.

9 Gino, per fare uno scherzo a Luisa, la prende sotto alle ascelle e la solleva di circa 50 cm. Enrico, copione, fa lo stesso scherzo a Paola, sollevandola di circa 40 cm. Luisa pesa 54 kg, Paola 62. Quindi Enrico ha sollevato un peso maggiore. Ha anche prodotto più lavoro?

Ritornando al magazzino, possiamo dire che con entrambi i dispositivi il lavoro prodotto è *P·h*: l'intensità F_2 della forza con cui viene sollevata la cassa è pari al peso *P* della cassa. I dispositivi non generano autonomamente il lavoro $F_2 \cdot h$, ma trasmettono il lavoro prodotto dall'uomo.

Nel *caso A* l'uomo deve tirare la fune di un tratto h. La forza F_1 che applica viene trasmessa uguale dalla fune, per cui $F_1 = F_2$. Il lavoro prodotto dall'uomo viene trasmesso nella stessa forma (forza di uguale intensità e traiettoria di uguale lunghezza) dal dispositivo.

Nel *caso B* l'uomo deve tirare la fune di un tratto doppio, cioè pari a h·2. Quindi produce un lavoro $F_1 \cdot h \cdot 2$. In uscita dal dispositivo il lavoro assume la forma $F_2 \cdot h$.

Da $F_1 \cdot h \cdot 2 = F_2 \cdot h$ ricaviamo: $F_2 = F_1 \cdot 2$, ovvero: $F_1 = F_2/2$.

In modo più espressivo, possiamo dire che:

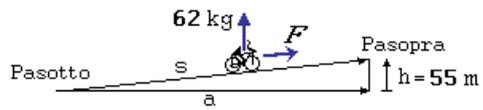
il dispositivo B permette di *distribuire il lavoro* da generare *su una traiettoria di lunghezza doppia* per cui viene *dimezzata la forza* da esercitare.

10 Quali svantaggi e quali vantaggi può avere il dispositivo B rispetto al dispositivo A?

11 Alla luce di quanto osservato (il dispositivo B distribuisce il lavoro su una traiettoria più lunga in modo che si deve tirare la fune con una forza minore), provate a discutere il problema iniziale, cioè a confrontare le difficoltà delle due strade che congiungono Pasotto a Pasopra (→ figura 8).

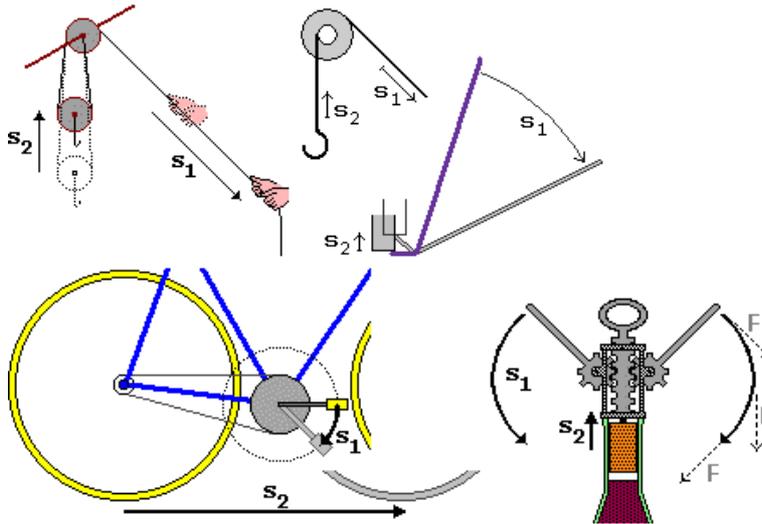
Determiniamo la forza di spinta *F* che deve produrre la bicicletta di Betta in funzione della lunghezza della strada *s* nel caso in cui Betta e bici pesino in tutto 62 kg. Nell'ipotesi irrealistica che la bicicletta possa procedere verticalmente, essa eserciterebbe una forza verticale di 62 kg per un tratto pari al dislivello *h*. Procedendo per una strada il lavoro viene distribuito su un tratto di lunghezza maggiore, per cui è minore la forza di spinta *F* da esercitare. Se la lunghezza della strada è *s*, il fattore di riduzione è *h*/*s* :

$$lavoro = F \cdot s = peso \cdot h \;\rightarrow\; F = peso \cdot h/s$$

[Nel supporre che $F \cdot s$ sia uguale a $peso \cdot h$ stiamo trascurando l'energia che la bicicletta impiega per vincere la resistenza dell'aria, le piccole asperità del terreno, …, energia che aumenta all'aumentare di s]

Nota 1. Studiando la situazione "sollevamento casse" abbiamo costruito un *modello fisico* di essa: abbiamo introdotto il concetto di ***lavoro*** con un significato ristretto rispetto a quello impiegato nel **linguaggio comune**.

Abbiamo fatto anche varie ***astrazioni***. Ad es. abbiamo supposto che l'energia meccanica (lavoro) prodotta dall'uomo venisse trasmessa integralmente dai due dispositivi, mentre in realtà un po' di *energia si disperde* a causa degli attriti (si trasforma in energia termica, cioè in riscaldamento delle rotelle, delle aste attorno a cui ruotano, …).

C'è indubbiamente un legame tra ***fatica*** dell'uomo e lavoro che egli produce: se aumentano il peso della cassa o il dislivello aumenta la fatica. Tuttavia l'uomo *consuma più energia dell'energia meccanica che produce*. Ad es. se a metà del dislivello l'uomo si ferma per riposare un po', in questo frattempo continua a consumare energia, anche se in quantità minore: per tenere stretta la fune deve mantenere i muscoli delle mani e delle braccia in contrazione, per stare in posizione eretta deve agire su altri muscoli, … e, comunque, deve usare un po' di energia per azionare il cuore, i polmoni, …. Analogamente c'è un legame tra ***sforzo*** che si deve fare per sorreggere un oggetto e ***forza*** che si deve applicare. Ma, a parità di peso, a seconda della posizione in cui ci mettiamo facciamo uno sforzo maggiore o minore. Infatti il corpo umano è una macchina assai complessa per cui, al variare della posizione, le forze che devono esercitare i vari muscoli cambiano e cambia il modo in cui parte di esse vengono "scaricate" sulle strutture portanti (ossa delle gambe, del tronco, …).

Nota 2. Generalizzando il caso del sollevamento dei pesi, data una forza di intensità costante F che (trainando o spingendo un oggetto) produce un movimento (man mano diretto come la forza) con traiettoria lunga s, viene chiamato ***lavoro*** fatto dalla forza il prodotto $F \cdot s$.

Le *macchine semplici* (→ scheda 1 di *La automazione*) sono macchine che, come il paranco del nostro esempio, trasformano il movimento prodotto dall'operatore in un altro movimento, in modo da cambiare forma al lavoro.

Nel caso del paranco, dell'argano, del piede di porco e del cavatappi, una traiettoria lunga $s1$ viene trasformata in una traiettoria di lunghezza $s2$ minore, in modo che la forza esercitata viene trasformata in una forza maggiore. Nel caso della bicicletta, invece, alla traiettoria percorsa dal pedale corrisponde una traiettoria percorsa dalla bicicletta che è più lunga: la forza che dobbiamo esercitare sui pedali è maggiore della forza con cui un'altra persona a piedi ci dovrebbe spingere (ma, in cambio, possiamo muoverci più velocemente).

Usando il teorema di Pitagora possiamo trovare il valore di s (in metri) relativo alle due strade. Per la strada più breve abbiamo:

$$s_1 = \sqrt{(a_1^2 + h^2)} = \sqrt{(750^2 + 55^2)} = \sqrt{(565525)} = 752.01\ldots = \text{[arrotondando] } 750$$

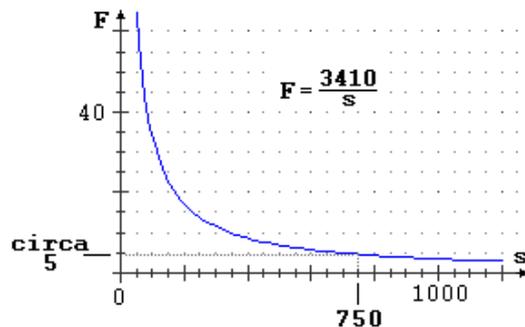
[abbiamo arrotondato alle decine di metri in quanto anche a_1 era così arrotondato]

Come si vede, con una pendenza come questa (55/750 = 7.3%), avanzamento orizzontale e avanzamento lungo la strada sono praticamente indistinguibili: entrambi sono arrotondabili a 750 m. A maggior ragione, anche nel caso della strada con minore pendenza (55/1250 = 4.4%) possiamo confondere a_2 con s_2 e, quindi, prendere $s_2 = 1250$.

Per trovare la forza di spinta F_1 (in kg) che la bicicletta deve produrre nel caso della strada lunga s_1 possiamo usare il grafico di F in funzione di s ($F = peso \cdot h/s = 62 \cdot 55/s = 3410/s$). Con la rappresentazione seguente possiamo ricavare che in corrispondenza di $s = 750$ si ha F pari circa a 5. Usando la formula otteniamo:

$F_1 = 3410/s_1 = 3410/750 = 4.546... =$ [arrotondando] 4.5.

12 Calcola il valore F_2 della forza di spinta che la bicicletta deve produrre percorrendo la strada lunga s_2 (arrotonda il risultato a due cifre significative).

$F_2 =$

3. Meccanismi che trasformano i movimenti

Riassumiamo quanto abbiamo visto finora:

- Le caratteristiche di una strada in salita possono essere espresse numericamente in due modi:

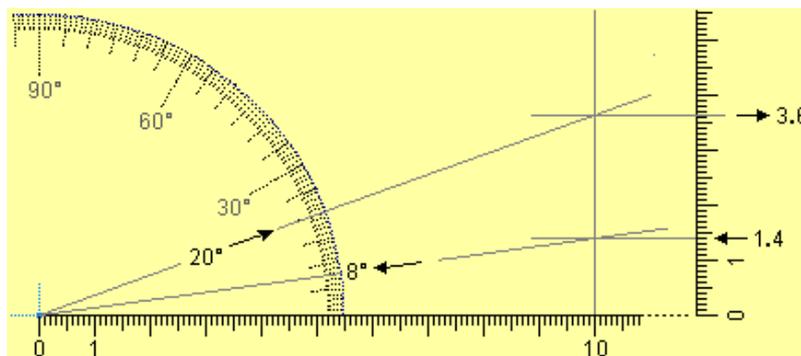
– indicando la pendenza della strada, cioè il rapporto tra dislivello superato e corrispondente avanzamento in orizzontale,

– indicando l'angolo di inclinazione.

- È facile passare dall'uno all'altra e viceversa con metodi grafici (→ *figura 11*):

– ad esempio è possibile trovare che a 20° di inclinazione corrisponde la pendenza 3.6/10 = 0.36 = 36% (valore approssimato),

– viceversa è possibile trovare che a una pendenza del 14% corrisponde un'inclinazione di 8° (valore approssimato).

figura 11

- Il lavoro (energia meccanica) che la bicicletta (o un altro mezzo di trasporto) deve produrre per superare la salita è direttamente proporzionale al dislivello.

[ciò vale se trascuriamo l'incidenza della resistenza dell'aria e di altri fattori, che disperdono energia in quantità che dipende anche dalla lunghezza del percorso seguito]

- A parità di dislivello h, la forza F di spinta che la bicicletta (o un altro mezzo di trasporto) deve esercitare lungo la direzione della strada è tanto minore quanto più lunga è la strada s: $F = peso \cdot h/s$.

Nel caso di Betta la forza di spinta della bicicletta lungo le due diverse strade sarebbe:

s_1 = 750 m (pendenza 7.3%) F_1 = 4.5 kg s_2 = 1250 m (pendenza 4.4%) F_2 = 2.7 kg.

13 Riferendovi a vostre esperienze, ritenete che tali valori coincidano con la forza che Betta deve esercitare sui pedali o no?

Prima di affrontare con calcoli e con ragionamenti più rigorosi la risoluzione di un problema è bene, in tutti i casi in cui è possibile, cercare di fare una stima intuitiva dei risultati. Ciò può essere utile anche nel guidarci nella risoluzione. In ogni caso, alla fine, è opportuno controllare la sensatezza dei risultati ottenuti. Ad esempio se con un particolare procedimento trovassimo che la forza che Betta deve esercitare sui pedali è di circa 1 kg ciò contraddirebbe le considerazioni affrontate nel quesito 14: la forza da esercitare deve essere dell'ordine di grandezza delle decine di chilogrammi.

La spiegazione del fatto che la forza da esercitare sui pedali è maggiore della forza di spinta effettivamente prodotta è semplice: se il pedale percorre una traiettoria lunga s_1 la bicicletta percorre un tratto di strada s_2 maggiore di s_1, per cui l'intensità F_2 della forza di spinta che viene generata nel punto di contatto tra ruota posteriore e terreno è inferiore all'intensità F_1 della forza esercitata. Precisiamo quantitativamente queste considerazioni.

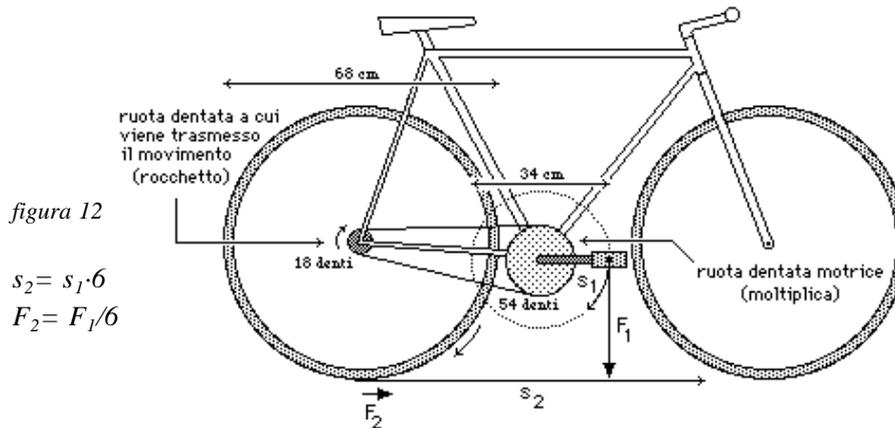



figura 12

$s_2 = s_1 \cdot 6$
$F_2 = F_1/6$

In *figura 12* è disegnata la bicicletta di Betta:
- la moltiplica ha il triplo di denti del rocchetto, per cui la ruota posteriore ad ogni pedalata fa ***3*** giri, cioè ha velocità di rotazione tripla di quella dei pedali;
- il pedale è lungo 17 cm, per cui con una pedalata viene percorsa una traiettoria circolare con diametro di 34 cm; il diametro della ruota posteriore della bici è di 68 cm; la circonferenza della ruota è perciò ***2*** volte la circonferenza della pedalata.

$$s_1 \xrightarrow[(1)]{\cdot 3} \xrightarrow[(2)]{\cdot 2} s_2 = s_1 \cdot 6$$

(1) fattore per cui è moltiplicata la velocità di rotazione
(2) rapporto tra la circonf. della ruota e quella della pedalata

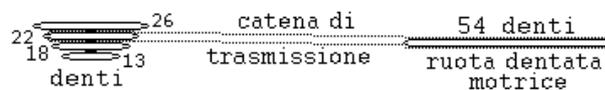
Quindi il lavoro prodotto con una pedalata viene distribuito su un traiettoria doppia che viene ripetuta 3 volte, cioè su un percorso che è 2·3 = ***6*** volte il percorso del pedale. La forza di spinta è perciò 6 volte più piccola della forza esercitata sul pedale. In conclusione:

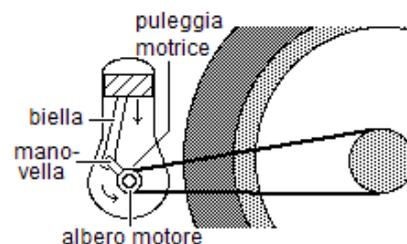
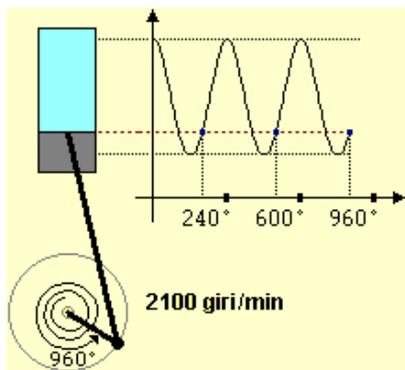
$$F_2 = F_1/6 \quad \text{ovvero:} \quad F_1 = F_2 \cdot 6$$

14 Qual è l'intensità della forza (arrotondata ai kg) che Betta deve esercitare sui pedali nei due casi?
nel caso della strada 1: … kg   nel caso della strada 2: … kg

Nel caso della strada 1 occorre esercitare una forza di quasi 30 kg, nel caso della strada 2 ne bastano poco più di 15. Se non si vuole fare troppo sforzo conviene decisamente questa strada.

Nel caso la bicicletta sia dotata di ***cambio*** (→ §3 della scheda 1 di *La automazione*) si può modificare il fattore per cui viene moltiplicata la velocità di rotazione. Vedi **qui** se sei interessato ad approfondire l'argomento.

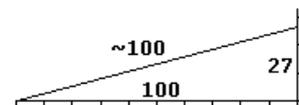
22 18 26 13 denti — catena di trasmissione — 54 denti ruota dentata motrice

Consideriamo, ora, il motorino di Rina. Certamente non avrà problemi per il tratto di strada che congiunge Pasotto e Pasopra: Rina ha già affrontato più volte salite del genere. Qualche problema potrebbe esserci per l'ultimo pezzo di strada prima del passo, che ha una pendenza media del 14% e potrebbe presentare qualche tratto con una pendenza superiore: se Betta, anche con il rapporto di trasmissione più basso, non ce la facesse, potrebbe sempre spingere a mano la bicicletta; un altro conto sarebbe spingere il ciclomotore. Il ciclomotore ha un *motore monocilindrico a due tempi*. Vediamo come funziona.

In un *cilindro* metallico, chiuso superiormente da un coperchio (detto *testata* del motore), può scorrere un pistone che, mediante un'asta mobile (*biella*), può far ruotare l'albero motore (l'albero su cui è inserita la puleggia motrice che, mediante una cinghia, trasmette il movimento alla puleggia fissata alla ruota posteriore del ciclomotore). La sporgenza dell'albero motore che si incerniera con la biella viene chiamata *manovella*. Il movimento (in su e in giù) del pistone è generato da ripetute esplosioni di benzina nebulizzata che avvengono nella parte superiore del cilindro, come è spiegato in dettaglio nell'appendice alla fine del paragrafo.

Ad ogni posizione della manovella corrisponde una determinata posizione del pistone. Quindi se la manovella, ovunque si trovi, compiendo 1, 2, 3, … giri ritorna sulla stessa posizione, anche il pistone ritorna alla stessa quota. Ad es., se la manovella è ruotata di 240° rispetto alla direzione verticale in alto, dopo 1 giro (rotazione di altri 360°, cioè di 240°+360° = 600°), dopo 2 giri (rotazione di 600° +360° = 960°), … il pistone ritorna nella stessa posizione. Ciò dà luogo a un grafico costituito da un tratto di linea che si ripete periodicamente in forma immutata.

15 Provate a descrivere a parole, in maniera il più possibile esauriente, l'andamento di questo grafico.

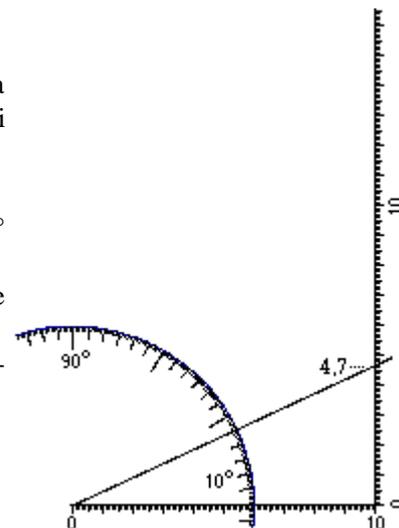
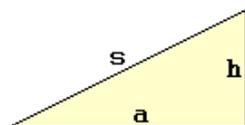
Il motorino è dotato di variatore automatico (→ §3 della scheda 1 di *La automazione*) per cui, all'aumentare della pendenza, passa automaticamente a un rapporto di trasmissione più basso.

In base alle caratteristiche descritte sulle istruzioni d'uso sappiamo che la massima forza di spinta in uscita è di 35.5 kg. Supponiamo che il peso di Rina e del ciclomotore sia di 130 kg.

16 Utililizzando le informazioni precedenti spiega perché Rina con il suo motorino può affrontare una strada che supera un dislivello di 27 m con un tratto lungo 100 m, cioè una strada con pendenza circa del 27%.

Vedi **qui** se sei interessato ad approfondire il funzionamento del motorino.

4. Esercizi

e1 Considera la parte centrale della ➡ figura 2. Stima a occhio la pendenza media per passare, proveniendo da ovest, dalla quota di 650 m alla quota di 675 m e quella per passare da 675 m a 700 m.

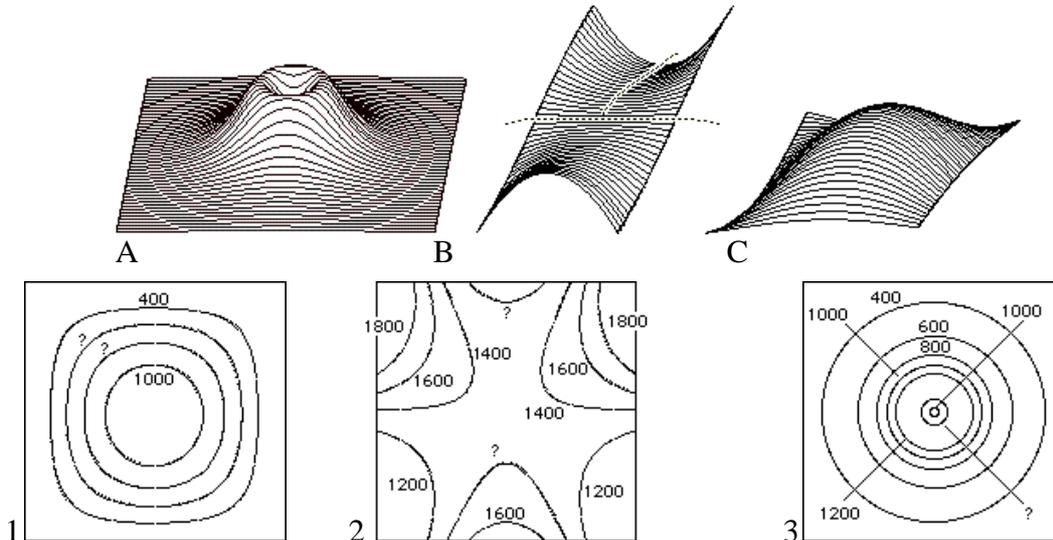
e2 Considera il disegno riprodotto a lato.
(a) Spiega perché da esso si può dedurre che un'inclinazione di 25° corrisponde a una pendenza del 47% (valore arrotondato a 2 cifre)
(b) Usando il disegno (e una riga) determina le pendenze che corrispondono a un'inclinazione di 30°, a una di 45° e a una di 60°.
(c) Viceversa, determina gli angoli di inclinazione che corrispondono a una pendenza del 80%, a una del 120% e a una del 160%.

e3 La tabella seguente si riferisce alla figura sotto a sinistra:

a	h	s
100	0	100
100	5	100.1249
100	10	100.4988
100	15	101.1187
100	20	101.9804
100	25	103.0776
100	30	104.4031
100	35	105.9481
100	40	107.7033
100	45	109.6586
100	50	111.8034
100	55	114.1271
100	60	116.619
100	65	119.2686
100	70	122.0656
100	75	125
100	80	128.0625
100	85	131.244
100	90	134.5362
100	95	137.9311
100	100	141.4214

Essa mette in luce che, se la pendenza (*h*) non è molto alta, avanzamento orizzontale (*a*) e spostamento lungo la strada (*s*) differiscono di una quantità molto piccola: si deve arrivare alla pendenza del 15% per avere una variazione percentuale che supera l'1% (a=100, s=101.1%).

Se la strada avanza orizzontalmente di 135 m e ha una pendenza è del 20%, usando la tabella sapresti *trovare* quanto differisce dall'avanzamento orizzontale la lunghezza della strada?.

Se la strada è lunga 120 m e ha una pendenza è del 20%, sapresti *trovare* quanto differisce dall'avanzamento orizzontale la lunghezza della strada?

e4 La tabella precedente può essere ottenuta con l'allegato programma QB o con l'allegato programma JS. Prova a generarla con uno dei due programmi e spiega l'impostazione di esso.

e5 Sotto sono raffigurate tre porzioni (inventate) di superficie terrestre: un vulcano, un valico che mette in comunicazione tre valli (i tratteggi rappresentano sentieri che provengono da esse), una collina. Associa a ogni porzione di superficie terrestre la corrispondente carta delle curve di livello e completa l'indicazione delle quote (l'unità di misura con cui sono indicate è il metro). Motiva le risposte.

e6 Se L è il lavoro prodotto esercitando una forza di intensità di F lungo una traiettoria di lunghezza s, la relazione tra queste tre grandezze è espressa dalla equazione:

$L = F \cdot s$ da cui si ricavano $F = L/s$ e $s = L/F$

Se in queste equazioni fissiamo il valore di una delle tre variabili, otteniamo delle formule che ci permettono di esprimere le rimanenti due variabili una in funzione dell'altra:
- ad esempio, esprimendo L in kgm, F in kg e s in m, se F=40, abbiamo: $L=40 \cdot s$ e $s=L/40$;
- se invece è fissato il lavoro, ad esempio se L=160, abbiamo: $F=160/s$ e $s=160/F$.

In un dizionario scientifico, sotto alla voce "proporzionalità", troviamo:

«Date due generiche grandezze x e y, si dice che x e y sono ***proporzionali*** (o direttamente proporzionali) se esiste un numero costante k (≠0) tale che x/y=k. Si dice che sono ***inversamente proporzionali*** se esiste un numero costante k (≠0) tale che x·y=k».

Completa la seguente tabella (mettendo una crocetta in una delle caselle e completando le frasi a destra).

	Proporzionali	*Inversam. proporz.*	
fissato F, L e s sono	☐	☐	Al triplicare di s, L … Al dimezzarsi di s, L …
fissato s, L e F sono	☐	☐	Al raddoppiare di F, L … Al dividersi per 3 di F, L …
fissato L, F e s sono	☐	☐	Al raddoppiare di s, F … Al dimezzarsi di s, F …

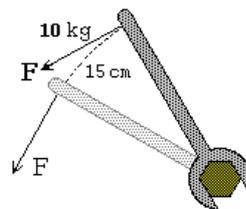
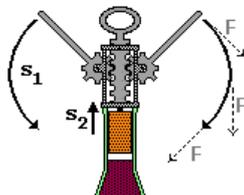
e7 In alternativa alle definizioni richiamate nel quesito e6 possiamo dire che x e y sono ***proporzionali*** se esiste una costante k (≠0) tale che, al variare di x e di y, sia sempre vera la condizione: y=k·x e che sono ***inversamente proporzionali*** se una è proporzionale all'inversa dell'altra, cioè se esiste una costante k (≠0) tale che, al variare di x e di y, sia sempre vera la condizione: y=1/x·k.

(*a*) Motiva l'equivalenza tra queste e le precedenti definizioni.

(*b*) Siano A un disegno e B una sua fotoriduzione di scala fissata. Sia x la distanza tra due punti qualunque di A e sia y la distanza tra i corrispondenti punti di B. x e y sono proporzionali, inversamente proporzionali o nessuna delle due cose? [*traccia*: indica con k la scala; si ha: y =…]

(*c*) Siano A un disegno e B la sua fotoriduzione ottenuta con una fotocopiatrice con scala di riproduzione variabile. Sia x la lunghezza che aveva in A un particolare che in B diventa lungo 5 cm e sia y la scala. x e y sono … [come in (*b*)]? [*traccia*: indica con k la lunghezza che il particolare assume in B; si ha: k = …]

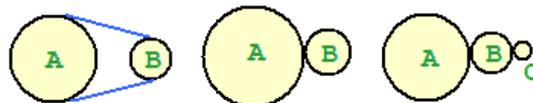
(*d*) Siano A un disegno e B una sua fotoriduzione di scala fissata. Siano x l'area di una particolare figura in A e y l'area della sua riproduzione in B. x e y sono … [come in (*b*)]? [*traccia*: indica con k la scala; y = …]

e8 Se per allentare un bullone devo applicare sull'impugnatura di una chiave (perpendicolarmente a essa) una forza con intensità di 10 kg e se nel frattempo la mia mano descrive una traiettoria lunga 15 cm, quanto lavoro compio?

Se faccio la stessa operazione con una chiave con impugnatura di lunghezza doppia, quanto lavoro compio? quanta forza devo applicare?

e9 Per cavare il tappo nella situazione raffigurata a fianco occorre esercitare sui bracci del cavatappi una forza complessiva di 25 kg. Sapendo che l'arco s1 descritto dalle mani è lungo 15 cm e che lo spostamento s2 del tappo è di 3 cm, deduci quanto vale la forza d'attrito tra tappo e bottiglia.

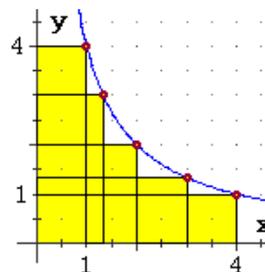
e10 Considera la figura a lato. Siano **Fu** l'intensità della forza che esercita verticalmente l'uomo, **Ft** l'intensità della forza d'attrito prodotta dal tappo contro la bottiglia, **D** la distanza dal perno del punto in cui fa forza la mano, **d** la distanza dal perno del punto in cui è incernierata la vite del cavatappi. Ovviamente, **d** è costante. Per ognuna delle coppie **Fu** e **Ft**, **Fu** e **D**, **Ft** e **D** (supposta fissata la terza grandezza) stabilisci se c'è una relazione di diretta o di inversa proporzionalità. Motiva la risposta.

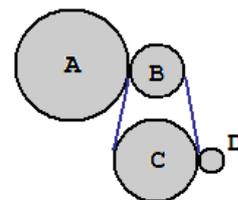
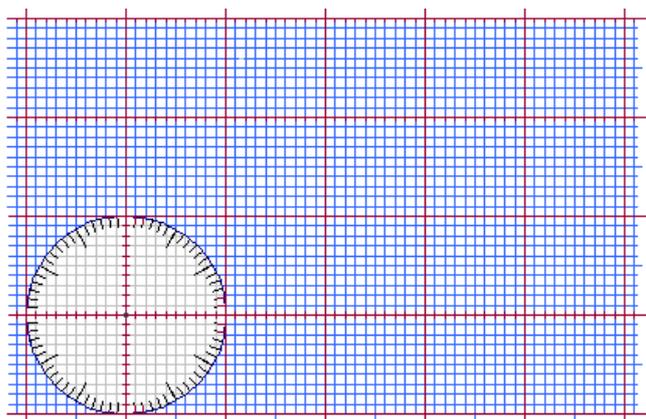
e11 Perché i ciclisti affrontando salite molto ripide procedono a zig-zag?

e12 Nella figura seguente sono illustrati, in scale diverse, tre meccanismi di trasmissione, a cisacuno dei quali, in ordine, sono riferiti i seguenti quesiti. Affrontali.

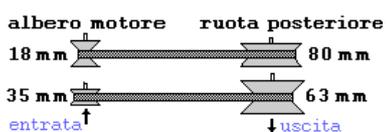
[diametri **1)** di A doppio di quello di B;
2) di A 3 cm, di B 1 cm;
3) di A 20 cm, di B 10 cm, di C 5 cm]

(1) Se A è la ruota motrice qual è il rapporto di trasmissione? Quale sarebbe se invece lo fosse B?
(2) Nel secondo caso la trasmissione non avviene mediante una catena o una cinghia, ma per contatto diretto. Fissato come positivo il verso antiorario, posso dire che se A ruota a 100 giri/min (verso antiorario), B ruota a –300 giri/min (verso orario). Il rapporto di trasmissione da A a B è quindi –3; qual è, invece, il rapporto di trasmissione da B ad A?
(3) Nel terzo caso a fianco, qual è il rapporto di trasmissione se A è la ruota motrice e C è la ruota finale? Quale sarebbe se, invece, la ruota motrice fosse C e la ruota finale fosse A? Quale sarebbe se la ruota motrice fosse A e la ruota finale fosse una ruota D a contatto diretto con C e uguale ad essa?

e13 A fianco sono raffigurati, sovrapposti, alcuni rettangoli di area 4 (se come unità di lunghezza si prende l'unità scelta per gli assi di riferimento) con due lati disposti lungo gli assi di riferimento.
Completa, mettendo una opportuna equazione al posto di "…", la seguente descrizione della curva per cui passano i vertici dei rettangoli opposti al punto (0,0).

{(x,y) : … AND x > 0 }

e14 Considera l'ingranaggio raffigurato a lato. Sotto sono indicate tre funzioni che esprimono la velocità di rotazione (in giri/min) di B, di C e di D in funzione della velocità di rotazione di A. Associa a ogni funzione la ruota finale (B, C o D) corrispondente e tracciane, sul medesimo sistema di riferimento, il grafico. Le ruote A, B, C e D hanno diametro di, rispettivamente, 20, 10, 15 e 5 cm.

F: x → -2x, G: x → 2/3·F(x), H: x → -3·G(x)

e15 Da una cartina ricavo che una funicolare ha un percorso rettilineo che si sviluppa orizzontalmente per 850 metri (cioè tale è la lunghezza della sua proiezione su un piano orizzontale). Su una guida della città leggo che tale percorso ha una inclinazione costante di 25°. Utlizza opportunamente la figura seguente (e una riga) per determinare il dislivello superato dalla funicolare e la pendenza del percorso. Spiega come hai proceduto.

e16 Ciascun alunno, utilizzando una cartina o misure più o meno dirette (mediante un contachilometri - dell'auto, della moto, del bus -, utilizzando l'orario ferroviario, contando i passi - se fatti uguali -, …), trova la distanza "lungo la strada" D della propria abitazione dalla scuola; inoltre, per una settimana, misura ogni mattina il tempo T per raggiungere la scuola (sottraendo l'eventuale tempo speso per chiacchierare con amici e per altre soste). Con questi dati:
(*a*) si studiano con opportuni modelli matematici (di tipo grafico e di tipo numerico) il modo in cui si distribuiscono i valori di D relativi all'intera classe;
(*b*) dopo che ogni alunno ha calcolato la media aritmetica TM dei valori di T rilevati durante un'intera settimana, si studia il modo in cui si distribuiscono i valori di TM relativi all'intera classe;
(*c*) si calcolano, poi, i valori V=D/TM dei vari alunni e si studia il modo in cui si distribuiscono;
(*d*) si procede come in (*c*) per VS=D/TS, dove TS è il tempo impiegato al sabato;
(*e*) si fanno opportuni confronti tra quanto ottenuto per D, TM, V e VS.

e17 La tabella ottenuta con i programmi considerati in **e4** può essere ottenuta anche con gli allegati programmi QB e JS. Prova a generarla anche con uno di essi e spiega l'impostazione di esso.

e18 Nella scheda abbiamo usato come unità di misura per la *forza* il ***chilogrammo*** (*kg*). Ad essere rigorosi avremmo dovuto chiamarlo *chilogrammo-forza* (*kgf*) in quanto il chilogrammo è l'unità di misura della *massa*. La massa di un corpo non dipende dalla posizione del corpo mentre il suo peso, cioè la forza che lo attrae verso il centro della terra, diminuisce all'aumentare dell'altitudine. Non è uguale neanche a parità di altitudine: essendo la Terra leggermente schiacciata, e per effetto della forza centrifuga, il peso ai poli è maggiore che all'equatore. In alternativa al kgf si usa, in fisica, il ***Newton***, che è la foza che applicata ad un corpo di massa 1 kg gli imprime una accelerazione di 1 m/s^2. Per esercitarti sull'argomento, vedi questo **script**.

e19 Il ciclomotore di Rina è dotato di un ***variatore automatico del*** *rapporto di trasmissione.* A fianco è illustrato come funziona questo automatismo (il disegno è sproporzionato: la puleggia motrice dovrebbe avere un diametro più piccolo). La puleggia motrice è dotata di un dispositivo che fa variare la distanza tra i due dischi che la compongono al variare della velocità di rotazione dell'albero motore (vengono sfruttate le variazioni della forza centrifuga): se diminuisce la pendenza della salita il numero di giri al minuto del motore aumenta e i due dischi della puleggia motrice si avvicinano aumentando il diametro della puleggia stessa (nel disegno passa da 18 a 35 mm). A sua volta la puleggia condotta è composta da due dischi che si avvicinano/allontanano, facendo variare il diametro della puleggia, se la cinghia di trasmissione diminuisce/aumenta la tensione. Nel caso del disegno, essendo aumentato il diametro della puleggia motrice, quello della puleggia condotta diminuisce (passa da 80 a 63 mm). Calcola il rapporto di trasmissione nelle due situazioni raffigurate.

1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini: *curva di livello* (dopo fig.1), *profilo altimetrico* (dopo fig.2 e prima di fig.4), *spezzata* (prima di ques.8), *proporzionalità (diretta e inversa)* (ques.e6 ed e7).

2) Su un foglio da "quadernone", nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").

INDICE